Examen de Modélisation et calcul scientifique

Jocelyne Erhel
INSA, Rennes

Janvier 2016

Durée 2 heures. Tous les documents sont autorisés. Les deux problèmes sont indépendants. Les questions ne sont pas par ordre de difficulté et peuvent être traitées dans un ordre quelconque. Il est conseillé de lire tout l'énoncé avant de commencer.

1 Modèle de diffusion 1D et discrétisation

On considère un fil électrique modélisé par un intervalle $[0, L]$, conducteur d'électricité, avec une conductivité constante égale à 1. On impose un potentiel fixe aux deux extrémités du bâton: $u(0) = u_0$ et $u(L) = u_L$. On suppose qu'il n'y a aucune perte ou arrivée de courant dans le fil.

On note $u(x)$ le potentiel en tout point $x \in [0, L]$ et $I(x)$ l'intensité du courant en x.

1. Ecrire l'équation de la loi d'Ohm reliant la dérivée $u'(x)$ du potentiel et l'intensité $I(x)$.

2. Ecrire l'équation de la loi de conservation de l'énergie à l'aide de la dérivée $I'(x)$ de l'intensité.

3. Montrer que la solution des deux équations vérifiant les conditions aux bords est

$$u(x) = \frac{u_L - u_0}{L} x + u_0. \tag{1}$$

4. On discrétise l'intervalle $[0, L]$ en n segments de longueur $d = L/n$. On note x_i les milieux de ces segments. Montrer que

$$x_i = d/2 + (i-1)d, \ 1 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Vérifier que $d = 2(L - x_n)$.

6. Soit $v_i = u(x_i)$, où $u(x)$ est défini par (1) et x_i par (2). Soit $U = 2(v_1 - u_0)$.

Montrer que

$$v_i = v_{i-1} + U, \ 2 \leq i \leq n.$$

Vérifier que $U = 2(u_L - v_n)$.

7. Montrer que v est la solution du système $Lv = c$ où $L = (l_{ij})$ est une matrice triangulaire inférieure bidiagonale et où $c = (c_i)$, qui sont définis comme suit.

Les termes diagonaux l_{ii} valent tous 1 et les termes extradiagonaux $l_{i-1,i}$ valent tous -1 $(2 \leq i \leq n)$.

Les coefficients du vecteur c valent $c_i = U$ pour $2 \leq i \leq n$ et $c_1 = u_0 + U/2$.

Par exemple, pour $n = 5$, on a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$c = \begin{pmatrix} u_0 + U/2 \\ U \\ U \\ U \\ U \end{pmatrix}$$

8. On utilise la méthode des éléments finis mixtes pour discrétiser les équations différentielles, avec les conditions aux bords. On note $u = (u_i)$ le vecteur des valeurs approchées aux points x_i, définies par cette méthode.

Montrer que u est solution du système tridiagonal $Au = b$, où $A = (a_{ij})$ et $b = (b_i)$ sont définis comme suit.

Tous les termes diagonaux a_{ii} valent 2 pour $i = 2, \ldots, n-1$, alors que $a_{11} = a_{nn} = 3$. Tous les termes des deux autres diagonales valent -1.

Les coefficients du vecteur b sont nuls sauf $b_1 = 2u_0$ et $b_n = 2u_L$.

Par exemple, pour $n = 5$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 2u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2u_L \end{pmatrix}$$

9. Vérifier que $Av = b$.

10. En déduire que $v = u$. Commenter.

2 Résolution d'un système linéaire creux

On considère une matrice carrée A d'ordre N, creuse, symétrique définie positive. On suppose qu'on a effectué la factorisation de Cholesky

$$A = LL^T$$

où L est une matrice triangulaire inférieure creuse inversible.

On suppose qu'on connaît la structure creuse de L. On définit l'ensemble L_{*j} par

$$L_{*j} = \{k \text{ tel que } j < k \leq N \text{ et } l_{kj} \neq 0\}.$$

On note $nz(L)$ le nombre d'éléments non nuls dans L.

1. Montrer que $nz(L) = N + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{card}(L_{*j})$, où $\mathbf{card}(L_{*j})$ est le cardinal de l'ensemble L_{*j}, autrement dit le nombre d'éléments non nuls dans la colonne j, sans le terme diagonal.

2. On veut résoudre le système linéaire $Ly = b$. Ecrire un algorithme de résolution, en utilisant la structure creuse de L et en parcourant la matrice L par colonnes.

3. On veut résoudre le système linéaire $L^T x = y$. Ecrire un algorithme de résolution, toujours avec la structure creuse de L et en parcourant L par colonnes.

4. On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$. Ecrire un algorithme de résolution à l'aide des questions précédentes.

5. Calculer, en fonction de $nz(L)$ et de N, le nombre d'opérations requises pour chacun des algorithmes.