Examen de Modélisation et calcul scientifique

Jocelyne Erhel
INSA, Rennes

Février 2014

Durée 2 heures. Tous les documents sont autorisés.

1 Problème de diffusion stationnaire

On considère un problème de diffusion stationnaire (indépendant du temps) dans un domaine 2D carré. On utilise un maillage régulier, avec n mailles dans chaque direction, soit un total de $N = n^2$ mailles. Après discrétisation, on obtient un système linéaire d'ordre N, avec une matrice A creuse, symétrique définie positive.

On numérote les cellules par lignes. La matrice A a une structure régulière, avec les éléments non nuls répartis sur cinq diagonales : $i - j = -n, -1, 0, 1, +n$.

On veut effectuer une factorisation de Cholesky, $A = LL^T$. La matrice L est creuse, on définit

$$L_{*j} = \{k \text{ tel que } j < k \leq N \text{ et } l_{kj} \neq 0\}$$

.

On rappelle ci-dessous l'algorithme de Cholesky, version fan-out.

Algorithme Cholesky fan-out
L = partie triangulaire inférieure de A
for $j = 1$ to N
  cdiv(j)
  for $k \in L_{*j}$
    cmod(j, k)
  endfor
endfor

L'opération cdiv(j) est la boucle
$l_{jj} = \sqrt{l_{jj}}$
for $i \in L_{*j}$
  $l_{ij} = l_{ij}/l_{jj}$
endfor

L'opération cmod(j,k) est la boucle
for $i \in L_{*j}$ et $i \geqslant k$
  $l_{ik} = l_{ik} - l_{ij} * l_{kj}$
endfor

1. on considère d'abord un stockage plein de A et de L. Indiquer le nombre approximatif d'opérations de la factorisation.
2. On considère maintenant un stockage bande de A et de L. On admet que la matrice L a la même structure bande que A et que :

$$L_{*j} = \{k \text{ tel que } j < k \leq \min(j+n, N)\}$$

.

   (a) Ecrire la version fan-out de l'algorithme de Cholesky, en détaillant les fonctions cdiv(j) et cmod(j,k). Préciser les indices de boucles k et i, autrement dit les éléments dans L_{*j}.
   (b) Calculer le nombre d'opérations approximatif de cdiv(j).
   (c) Calculer le nombre d'opérations approximatif de cmod(j,k).
   (d) En déduire que le nombre d'opérations de la factorisation est environ n^4.
3. On considère maintenant un stockage creux de A et de L. On effectue une renumérotation par dissections emboîtées. Le séparateur de premier niveau est une ligne avec n cellules.

   On admet que le facteur de Cholesky pour ce bloc séparateur est plein et que toutes les autres opérations ont un coût moindre. On pourra alors négliger leur coût.

   (a) Indiquer le nombre d'opérations pour effectuer la factorisation de Cholesky de ce bloc.
   (b) En déduire le nombre approximatif d'opérations de la factorisation pour ce stockage creux.
4. Comparer les trois coûts de factorisation (stockage plein, stockage bande, stockage creux avec dissections emboîtées). Commenter.

2 Problème de diffusion transitoire

On considère un problème de diffusion transitoire (dépendant du temps), toujours dans un domaine 2D carré. On utilise toujours un maillage régulier, avec $N = n^2$ mailles. Après discrétisation en espace, on obtient un système différentiel avec N équations :

$$\frac{dp}{dt}(t) + A\,p(t) = q(t),$$

où t est la variable temps, p est une fonction de t, avec $p(t)$ vecteur inconnu de taille N, q est une fonction de t, avec $q(t)$ vecteur donné de taille N. Le terme $\frac{dp}{dt}(t)$ représente la dérivée de la fonction p au temps t. La matrice A ne dépend pas de t, c'est une matrice creuse, symétrique définie positive. La fonction p à l'instant $t = 0$, est un vecteur donné, noté $p(0) = p^0$.

On discrétise en temps l'équation différentielle, par un schéma dit d'Euler implicite. On introduit un pas de temps fixé $\Delta t > 0$ et on définit les instants $t_m = m\Delta t$. On note p^m une approximation de $p(t_m)$, qu'on va calculer. On a p^0 connu et on obtient la récurrence suivante :

$$\frac{p^{m+1} - p^m}{\Delta t} + A\,p^{m+1} = q^{m+1},$$

1. Montrer que p^{m+1} est solution d'un système linéaire $(I + \Delta t A)x = b$. Préciser b en fonction de Δt, p^m et q^{m+1}.
2. Montrer que la matrice $(I + \Delta t A)$ est creuse et symétrique définie positive.
3. On effectue la factorisation de Cholesky : $I + \Delta t A = LL^T$, avec L triangulaire inférieure creuse. Ecrire l'algorithme de calcul de p^{m+1} à chaque pas de temps.
4. Ecrire l'algorithme de résolution du système triangulaire $Ly = b$, en utilisant $L_{*j}, j = 1, \dots N$.
5. Soit $nz(L)$ le nombre d'éléments non nuls dans L. Donner une approximation du nombre d'opérations pour résoudre le système $Ly = b$.
6. En déduire une approximation du nombre d'opérations pour calculer p^{m+1}.