Correction de l'examen 2012
de Modélisation et calcul scientifique

Jocelyne Erhel
INSA, Rennes

Février 2013

Durée 2 heures. Tous les documents sont autorisés.

Les notations ont changé pour être adaptées à celles du cours de 2013. Le corrigé est incomplet et n'est pas rédigé, il faut le lire comme un brouillon.

On considère un problème de diffusion (par exemple un écoulement d'eau). Après discrétisation par une méthode de volumes finis appliquée à un maillage régulier, on obtient un système linéaire d'ordre N, avec une matrice symétrique A définie positive. On veut effectuer une factorisation de Cholesky, $A = LL^T$.

La matrice L est creuse, on définit $(L_{*j}) = \{i \text{ tel que } i > j \text{ et } l_{ij} \neq 0\}$.

On rappelle ci-dessous l'algorithme de Cholesky, version right-looking.

for $j = 1$ to N
  cdiv(j)
  for $k \in (L_{*j})$
    cmod(j, k)
  endfor
endfor

L'opération cdiv(j) est la boucle
$l_{jj} = \sqrt{l_{jj}}$
for $i \in (L_{*j})$
  $l_{ij} = l_{ij}/l_{jj}$
endfor

L'opération cmod(j, k) est la boucle
for $i \in (L_{*j})$ et $i \geq k$
  $l_{ik} = l_{ik} - l_{ij} * l_{kj}$
endfor

1 Factorisation de Cholesky pour un problème 2D

Pour un problème 2D, la matrice A a une structure régulière, avec les éléments non nuls répartis sur cinq diagonales : $i - j = -n, -1, 0, 1, +n$.

On n'effectue pas de renumérotation. On suppose que la matrice L a une structure bande: les éléments vérifient $l_{i,j} \neq 0 \Rightarrow |i-j| \leq n$. On suppose que $|i-j| \leq n \Rightarrow l_{i,j} \neq 0$.

Donc $(L_{*j}) = \{i \text{ tel que } j+1 \leq i \leq \min(j+n, N)\}$.

1. Vérifier que le nombre d'éléments non nuls de A est environ $nz(A) = 5N$.
2. Vérifier que le nombre d'éléments non nuls de L est environ $N^{3/2}$.
3. Ecrire la version right-looking de l'algorithme de Cholesky, en détaillant les fonctions cdiv(j) et cmod(j,k). Préciser les indices de boucles k et i, autrement dit les éléments dans L_{*k}.
4. Calculer le nombre d'opérations approximatif de cdiv(k).
5. Calculer le nombre d'opérations approximatif de cmod(j,k).
6. En déduire que le nombre d'opérations de la factorisation est environ N^2.
7. Analyser le remplissage lors de la factorisation et retrouver le résultat que la structure de L est bande.
8. Quels algorithmes de renumérotation pourrait-on utiliser pour réduire le remplissage ?

2 Corrigé des questions 3 à 6

L'opération cdiv(j) s'écrit:

$l_{jj} = \sqrt{l_{jj}}$
for $i = j+1, \min(j+n, N)$
  $l_{ij} = l_{ij}/l_{jj}$
endfor
pour $j+n \leq N$, on a donc $n+1$ opérations.
L'opération cmod(j,k) s'écrit:
for $i = k, \min(j+n, N)$
  $l_{ik} = l_{ik} - l_{ij} * l_{kj}$
endfor
pour $j+n \leq N$, on a donc $2*(j+n-k+1)$ opérations.
Enfin, Cholesky s'écrit:
for $j = 1$ to N
  cdiv(j)
  for $k = j+1, \min(j+n, N)$
    cmod(j, k)
  endfor
endfor

On a donc, pour $j + n \leq N$, un nombre d'opérations

$$N_j = N(\text{cdiv}(j)) + \sum_{k=j+1}^{j+n} N(\text{cmod}(j,k)) = n + 1 + 2 * \sum_{k'=1}^{n} k' = n^2 + O(n)$$

où $k' = j + n - k + 1$.

Au total, on a environ

$$N = \sum_{j=1}^{N} N_j = N^2 + O(N)$$

Il faut détailler les cas où $\min(j+1, N) = N$ pour avoir un calcul plus précis.