Lissage itératif d'images avec préservation des discontinuités

On s'intéresse au problème du lissage extrême d'images à des fins soit de restauration d'images très dètériorées, soit d'effet de stylisation en edition photographique. Envisagé comme un problème de filtrage linéaire, un tel lissage nécessite le recours à un filtre linéaire de grand support. Définir le noyau d'un tel filtre peut, sauf dans des cas simples (moyennage pur ou filtre gaussien) s'avérer difficile. Une alternative, que nous allons étudier, consiste à appliquer itérativement des modifications (filtre linéaire en particulier) très locales en chaque point.

On notera $I^0 = [I^0(i)]_{i=1\cdots m*n}$ l'image originale scalaire de taille $m \times n$. On définit le filtre linéaire local H par son masque $W = [w_{ij}]_{i,j=1\cdots 2k+1}$ de taille $(2k+1) \times (2k+1)$, où k est un petit entier. On définit la suite d'images lissées $I^{(0)}, I^{(1)}, \cdots I^{(P)}$ par la récurrence

$$I^{(0)} = I^0 \quad (1)$$

$$I^{(p+1)} = H * I^{(p)}. \quad (2)$$

- L'image $I^{(P)}$ peut être obtenue directement par filtrage de l'image originale avec un certain filtre linéaire $H^{(P)}$. Établir la taille du masque de ce filtre.
- En déduire le nombre d'opérations requis pour appliquer ce filtre directement et le comparer au nombre d'opérations requis pour les P applications successives du filtre H.
- Répondre à la question précédente dans le cas où le filtre H est séparable.

Dans le cas où H est obtenu par troncature à distance k d'un noyau gaussien d'écart type σ, une approximation du filtre $H^{(P)}$ peut être obtenue par un calcul analytique sur les fonctions gaussiennes

- Établir la nature du produit de convolution de deux gaussiennes scalaires centrées $N(0, \sigma^2)$ et $N(0, \nu^2)$.
- En déduire approximativement la nature du filtre $H^{(P)}$.

On s'intéresse maintenant au cas où le filtre H est normalisé et défini par le masque

$$W = \frac{1}{4\alpha+1}\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

où α est un paramètre positif.

- Discuter, en fonction de α, le type de filtrage obtenu avec un tel masque.
- En supposant la convergence de la suite d'images $(I^{(p)})_p$, établir que l'image limite obtenue vérifie
$$\Delta I^{(\infty)} = 0 \tag{4}$$
où Δ est une certaine approximation discrète à préciser de l'opérateur laplacien.
- En déduire qualitativement le type d'image obtenue par application répétée de ce filtre, et les problèmes que cela pose.

Pour éviter ces problèmes, le filtrage itératif peut être stoppé sur la base d'un critère visuel ou, pour plus d'automatisation, sur la base d'un critère de régularité. Une autre façon consiste à poser le problème non pas comme celui de la conception d'un filtrage itératif, mais comme un problème de minimisation. On s'intéresse en particulier au problème:

$$\arg\min_I \underbrace{\sum_i [I^0(i) - I(i)]^2 + \alpha \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{C}} [I(i) - I(j)]^2}_{E(I)} \tag{5}$$

où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des paires horizontales et verticales de pixels voisins.

- Expliquer le choix de la fonction à minimiser.
- Montrer que cette fonction admet un unique minimum et que celui-ci est atteint par l'image solution du système d'équations linéaires
$$\forall i = 1\cdots mn,\ (1+4\alpha)I(i) - \alpha \sum_{j\in V(i)} I(j) = I^0(i), \tag{6}$$

où $V(i)$ dénote l'ensemble des 4 voisins de i. Il existe différente méthodes, itératives ou non, pour résoudre ce type de système linéaire. En notant $A = (1+4\alpha)\mathbb{I} - \alpha B$ la matrice de ce système, avec $\mathbb{I}$ la matrice identité, la méthode itérative de Jacobi consiste à résoudre à chaque pas

$$(1+4\alpha)I^{(p+1)} = I^0 + \alpha B I^{(p)}. \tag{7}$$

- Si la suite d'images ainsi obtenue converge, montrer que la limite est bien solution du système linéaire à résoudre.

- Comparer ce schéma itératif avec le filtrage itératif (1-2).

Malgré l'amélioration apportée par rapport au filtrage itératif, le lissage obtenu rend très flous les contours de l'image. Pour éviter cela, il est nécessaire de chercher à préserver les contours forts de l'image. Ces contours peuvent être ceux de l'image originale, avec une nouvelle fonction à minimiser de la forme

$$E(I) = \sum_i [I^0(i) - I(i)]^2 + \alpha \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{C}} w_{ij}(I^0)[I(i) - I(j)]^2 \tag{8}$$

avec

$$w_{ij}(I^0) = \exp\left[-\frac{(I^0(i) - I^0(j))^2}{\tau^2}\right] \tag{9}$$

avec τ un paramètre positif.

- Justifier le choix de cette nouvelle fonction.

- Donner l'expression de la remise à jour de l'intensité au pixel i dans le cas où le solveur de Jacobi est utilisé.

- Quelles sont les limitations de cette approche, en particulier dans le cas où l'image originale est très bruitée.

Une alternative consiste à borner la pénalisation sur les fortes différences d'intensité entre voisins dans l'image solution, de façon à ce que de tels sauts puissent encore exister dans cette image. On peut ainsi considérer la nouvelle fonction

$$E(I) = \sum_i [I^0(i) - I(i)]^2 + \alpha \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{C}} \underbrace{\left(1 - \exp\left[-\frac{(I(i) - I(j))^2}{\tau^2}\right]\right)}_{\phi[(I(i)-I(j))^2]} \tag{10}$$

- Expliquer la difficulté mathématique causée par cette modification.

- En notant que

  $$\phi(u^2) = \min_{z\in[0,1]} [z\frac{u^2}{\tau^2} + \underbrace{1 - z + z\ln z}_{\psi(z))}] \tag{11}$$

  montrer que le problème de minimisation de E peut être remplacé par un nouveau problème de minimisation joint relativement à I et un ensemble de variables $(z_{ij})_{\{i,j\}\in\mathcal{C}}$ à valeurs dans $[0, 1]$.

- Expliquer comment ce nouveau problème de minimisation peut être mené de façon iterative et alternée.