Mise en correspondance entre deux vues d'une même scène

Soient I et I' deux images monochromes prises à deux instants différents par un capteur CCD en mouvement (appareil photo numérique ou camescope). Le scène représentée peut éventuellement contenir quelques objets en mouvement entre les deux instants. On se propose d'estimer une transformation géométrique simple permettant d'aligner au mieux le contenu de la seconde image sur celui de la première.

La classe des transformations considérée est celle des affinités. Un vecteur à six paramètres $\boldsymbol{\theta} = [a, b, c, d, e, f]^{\mathrm{T}}$ permet de définir la fonction de *déplacement*:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\boldsymbol{\theta}} : \qquad\qquad \Omega &\mapsto \quad \mathbb{R} \\ \mathbf{p} = (x, y) &\rightarrow \quad \mathbf{d}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

où $\Omega = [1, m] \times [1, n] \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine continu associé à la grille discrète de pixels $\mathcal{P} = \{1 \cdots m\} \times \{1 \cdots n\}$.

Une méthode consiste à essayer de mettre en correspondance tous les pixels de la première image avec des pixels de la seconde image, sur la base de leurs intensités respectives.

Alignement d'histogramme Avant de pouvoir réaliser cela, il est préférable de compenser les éventuels changements d'intensité entre les deux images (variations d'exposition et d'illumination causées par le changement de points de vue, variations automatiques de réglage du capteur CCD). Les images étant codées su 8 bits ($I(\mathbf{p}) \in \Lambda = \{0 \cdots 255\}$), on notera $\mathbf{q} = [q_b]_{b=1 \cdots B}$ et $\mathbf{q}'$ les B-histogrammes des deux images. Une manière d'aligner globalement les contenus photométriques consiste à trouver deux fonctions g et g' croissantes telles que les images modifiées $g(I)$ et $g'(I')$ aient des histogrammes les plus proches possible d'un histogramme de référence $\mathbf{r}$. On définira la fonction de répartition discrète $\mathbf{Q} = [Q_b = \sum_{c=1}^{b} q_c]_{b=1 \cdots B}$ et similairement $\mathbf{Q}'$ et $\mathbf{R}$.

Question Montrer qu'on peut définir une fonction Q^{-1} sur $[0,1]$ telle que $Q^{-1}(Q_b) = b,\ \forall b \in \{1 \cdots B\}$.

Question Proposer deux fonctions g et g' sur Λ dans le cas où $\mathbf{r}$ est l'histogramme uniforme.

Question Expliquer pourquoi le choix de l'histogramme uniforme comme référence commune peut s'avérer problématique.

Un meilleur choix d'histogramme de référence peut être obtenu en "moyennant" d'une certaine façon $\mathbf{q}$ et $\mathbf{q}'$.

Question : Expliquer, schéma à l'appui, en quoi le choix $\mathbf{r} = 0,5(\mathbf{q} + \mathbf{q}')$ n'est pas bon.

Question : Montrer que la moyenne des fonctions de répartition inverses $0.5(Q^{-1} + Q'^{-1})$ permet de définir un histogramme de référence plus approprié et proposer une expression pour g et g' dans ce cas.

Estimation robuste de déplacements affines On continuera à noter I et I' les deux images après alignement d'histogramme. On peut désormais faire l'hypothèse que l'intensité d'un même point physique visible dans les deux images est inchangée. Si le pixel $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ est un tel point dans la première image et que sa position dans la seconde image est bien donnée par le déplacement $\mathbf{d}_{\boldsymbol{\theta}}$, on alors:

$$I(\mathbf{p}) \approx I'(\mathbf{p} + \mathbf{d}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{p})). \tag{2}$$

Une idée simple pour estimer $\boldsymbol{\theta}$ est alors de chercher

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \underbrace{\sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} [I'(\mathbf{p} + \mathbf{d}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{p})) - I(\mathbf{p})]^2}_{E(\boldsymbol{\theta})} \tag{3}$$

Question Montrer que la fonction déplacement peut se mettre sous la forme $\mathbf{d}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{p}) = P(x,y)\boldsymbol{\theta}$ où $P(x,y)$ est une matrice 2×6 fonction de x et y.

La fonction E à minimiser n'est pas quadratique en $\boldsymbol{\theta}$. On peut cependant se ramener à un tel cas dans le cas de petits déplacements.

Question Sous hypothèse de petits déplacements, approcher $E(\boldsymbol{\theta})$ par une fonction quadratique

Question Donner l'expression du vecteur $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ où cette nouvelle fonction atteint son minimum global.

Si plusieurs pixels dans l'image ne peuvent pas être correctement mis en correspondance pas un mouvement affine calculé sur toute l'image, ils risquent de détériorer l'estimation obtenue par la fonction E précédente constituée de coûts quadratiques élémentaires.

Question Indiquer quelles sont les zones de la première image où ces problèmes peuvent se poser.

Pour s'affranchir automatiquement de l'influence de telles zones, on peut remplacer la fonction $(.)^2$ par la fonction $\phi(.) = [\min(., \tau)]^2$, avec τ un paramètre à régler.

Question Expliquer l'intérêt d'un tel choix.

Question Montrer que $\phi(u^2) = \min_{z \in \{0,1\}}[zu^2 + \psi(z)]$, où ψ est une fonction à déterminer.

Question En déduire que le problème de minisation de E peut être remplacé par un nouveau problème de minimisation joint relativement à $\boldsymbol{\theta}$ et à un ensemble de variables binaires $[z_{\mathbf{p}}]_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}}$. Donner une interprétation à ces variables binaires.

Question Expliquer comment ce nouveau problème de minimisation peut être mené de façon itérative.

Dans le cas où l'hypothèse des petits déplacements n'est pas adaptée, on peut procéder de façon incrémentale, en raffinant successivement une estimation courante à l'aide d'une petite correction.

Question En supposant qu'une estimation $\boldsymbol{\theta}_0$ soit disponible, montrer qu'une petite correction $\Delta\boldsymbol{\theta}$ peut être estimée en s'appuyant sur des éléments vus dans les questions précédentes.

Question Imaginer un mise œuvre complètement automatique de ce principe de raffinements successifs à l'aide de pyramides gaussiennes d'images construites respectivement sur la base de I et I'.