

ANALYSE FRACTALE DES SIGNAUX

Jacques LÉVY VÉHEL

INRIA

Domaine de Voluceau

Rocquencourt

B.P.105

78153 Le Chesnay Cedex

Jacques.Levy_Vehel@inria.fr

<http://www-rocq.inria.fr/fractales/>

Qu'est-ce que la Géométrie Fractale ?

Deux aspects :

- objets fractals
- analyse fractale

Quelques mots clés :

- dimension fractionnaire ou “fractale”
- irrégularité
- invariance par changement d'échelle

“Comment diable avez-vous pu construire un robot qui rêve ?” demanda Suzan Calvin en examinant sur l’écran la configuration complexe du cerveau électronique de l’hunoïde.

“Je me suis servie de la Géométrie Fractale”, avoua Linda, la robopsychologue débutante.

“Oui, ça je l’ai bien compris. Mais pourquoi ?”

“Ca n’avait jamais été fait. J’ai pensé que ça produirait un schéma cérébral avec une complexité accrue.”

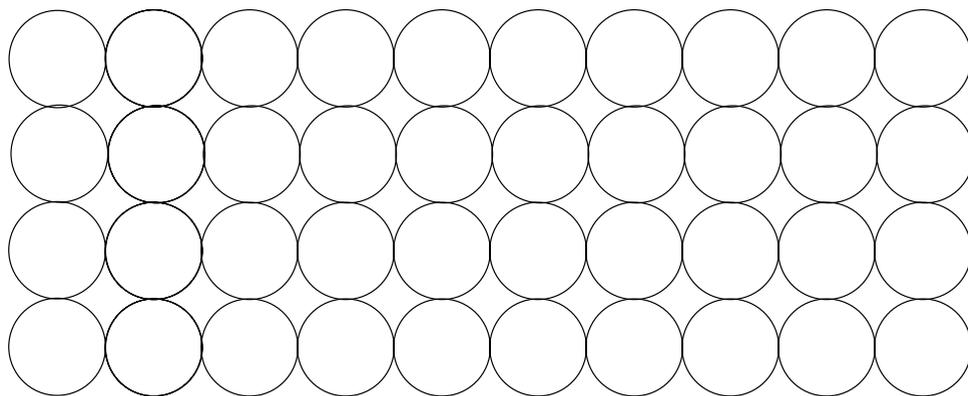
Isaac Asimov, “Le robot qui rêvait”

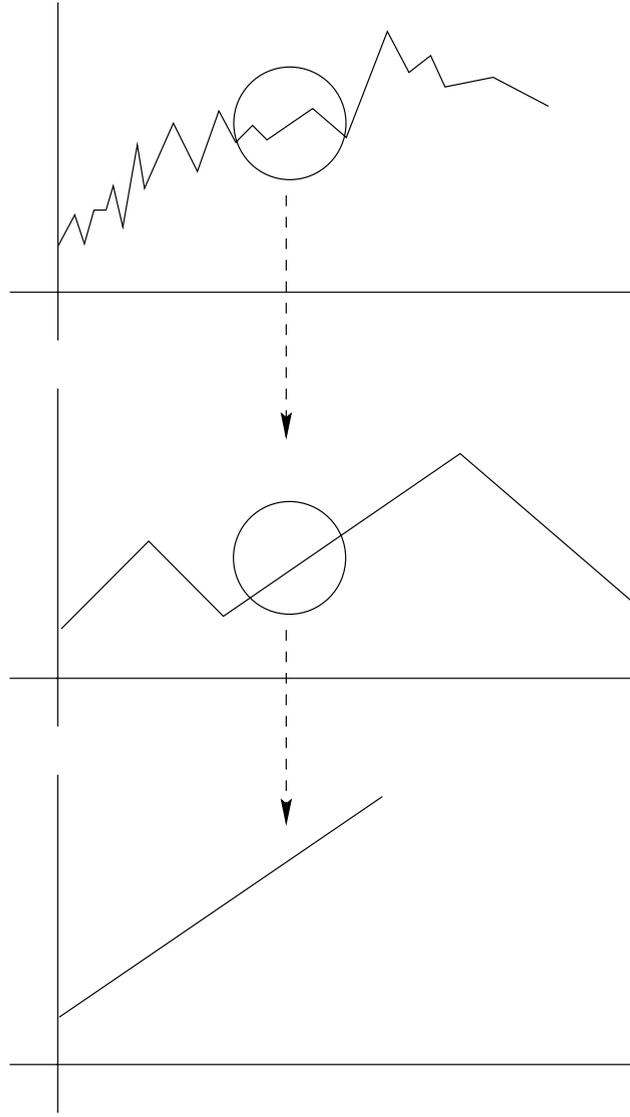
remplacer

Invariance par translation

par

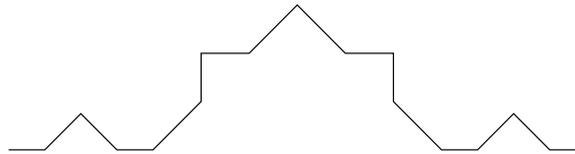
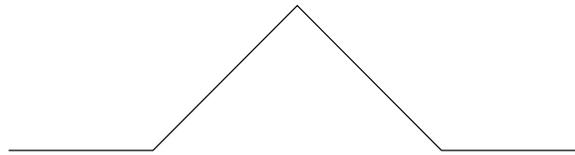
Invariance par changement d'échelle.





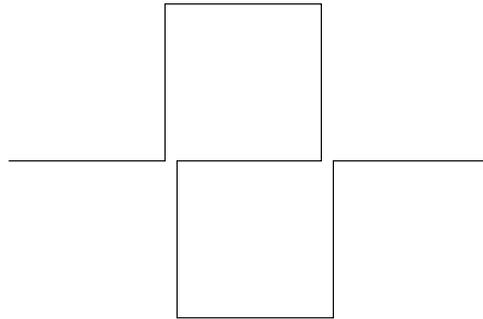
A un ensemble E on associe une dimension (fractionnaire) qui “mesure” comment E “remplit” l’espace.

Courbe de Von Koch

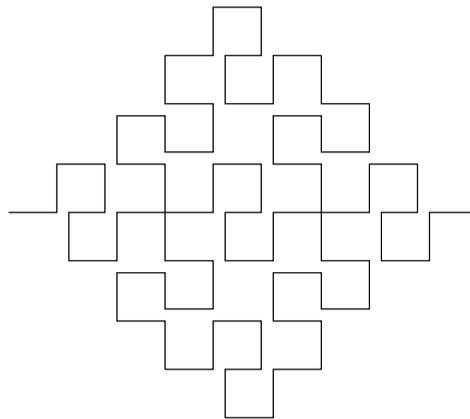


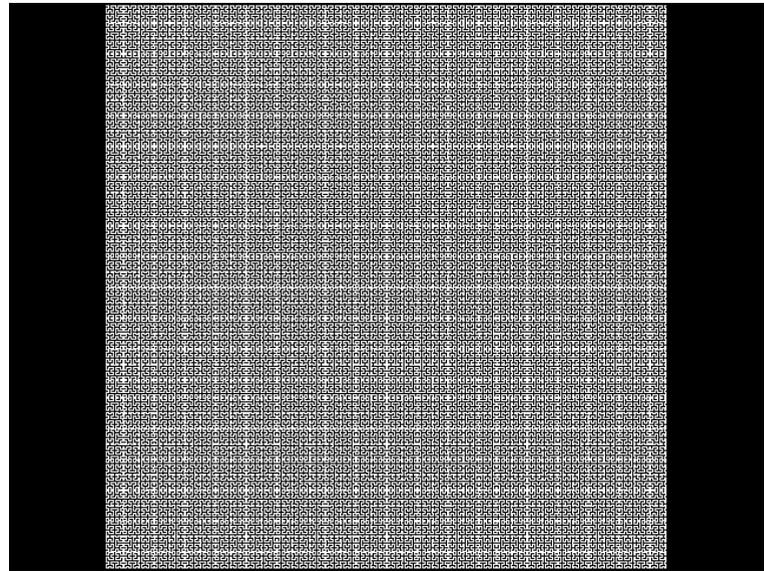
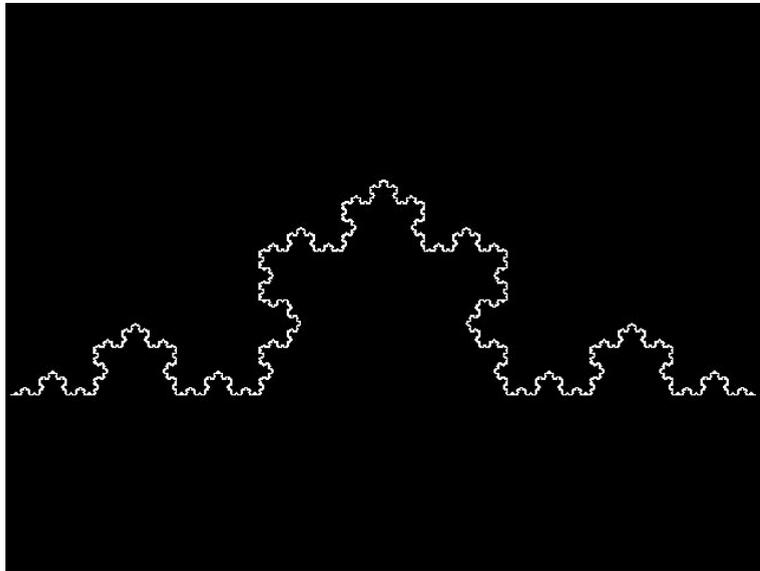
$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

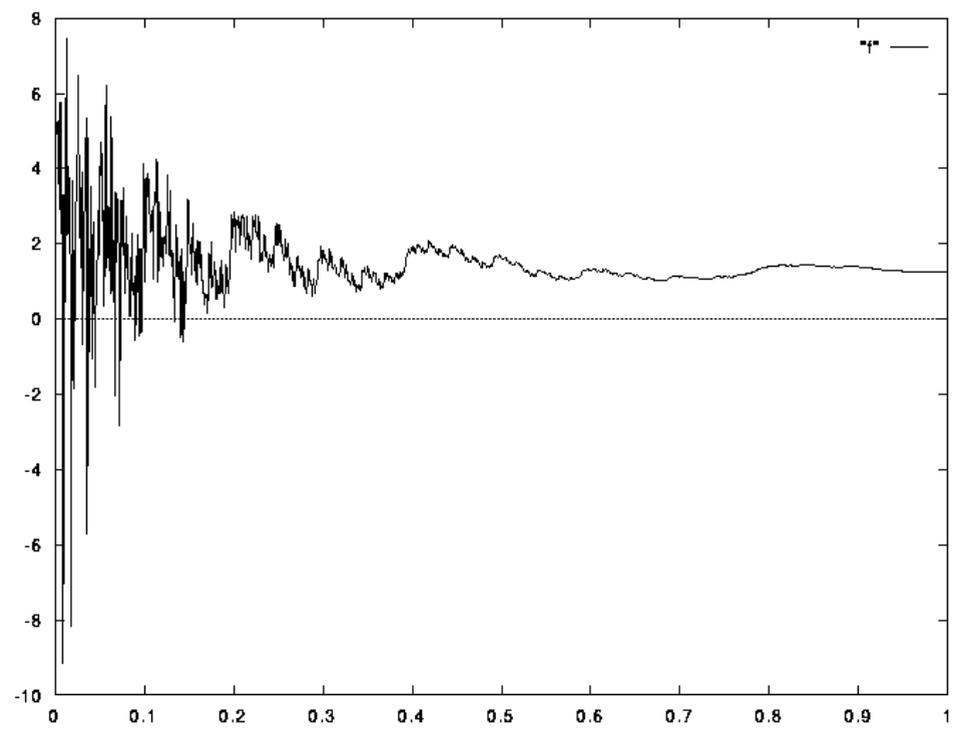
Courbe de Peano



$$D = 2$$







**Application en Traitement du Signal :
Régularité Ponctuelle et Analyse Multifractale.**

- **Exposant de Hölder et Synthèse Vocale**
- **Spectre de Singularités et Traitement des Images**

Régularité Ponctuelle

Elle est mesurée par exemple par l'exposant de Hölder.

L'exposant de Hölder ponctuel d'une fonction f continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le réel positif ou nul α tel que :

$$- \forall \gamma < \alpha, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - P(h)|}{|h|^\gamma} = 0,$$

$$- \text{si } \alpha < +\infty, \forall \gamma > \alpha, \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - P(h)|}{|h|^\gamma} = +\infty$$

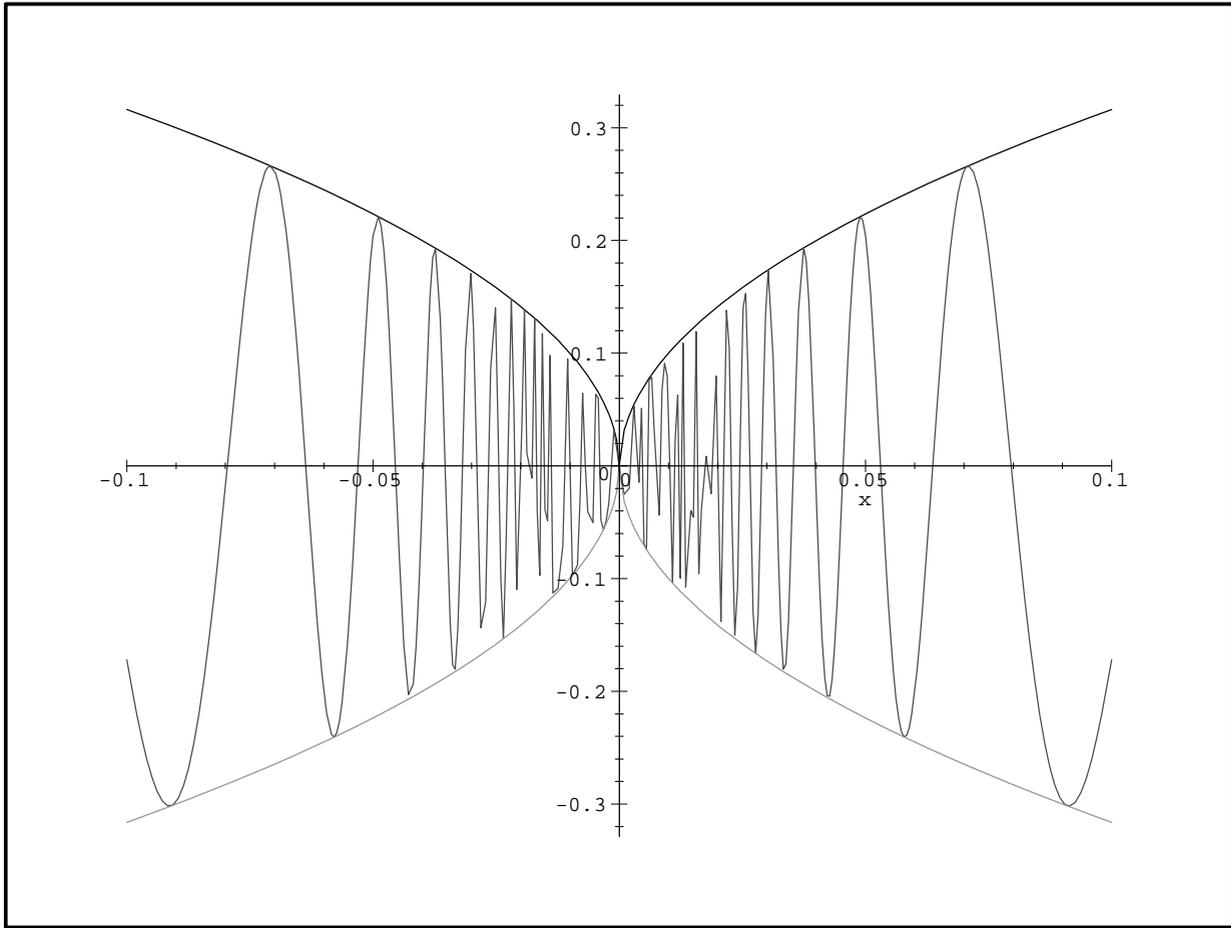
où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à la partie entière de α . On dit alors que $f \in C_{x_0}^\alpha$.

Une définition équivalente est, quand $0 < \alpha < 1$:

$$\exists c, \rho_0 > 0, \forall \rho < \rho_0 \quad \sup_{x, y \in B(x_0, \rho)} |f(x) - f(y)| \leq c \rho^\alpha$$

Exemple : soit $f(t) = |t|^\alpha \sin \frac{1}{t^\beta}$, $f(0) = 0$, $0 < \alpha < \min(1, \beta)$.

Alors : $\alpha(0) = \alpha$.



En tout point x du domaine de f , on peut définir $\alpha_f(x)$.
Quelle est la structure de $\alpha_f(x)$?

Théorème : Soit s une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- s est la fonction de Hölder d'une fonction continue.
- il existe une suite de fonctions continues $(s_n)_{n \geq 1}$, telles que :

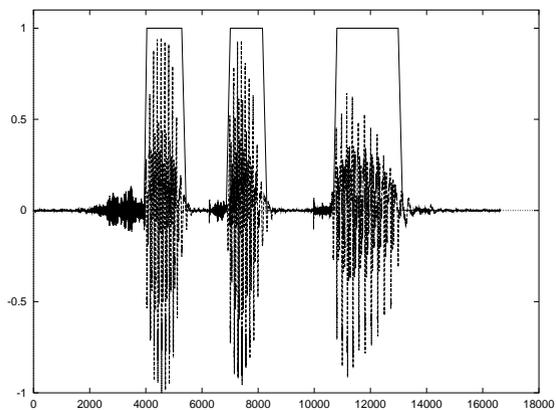
$$s(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$$

Application en Synthèse Vocale

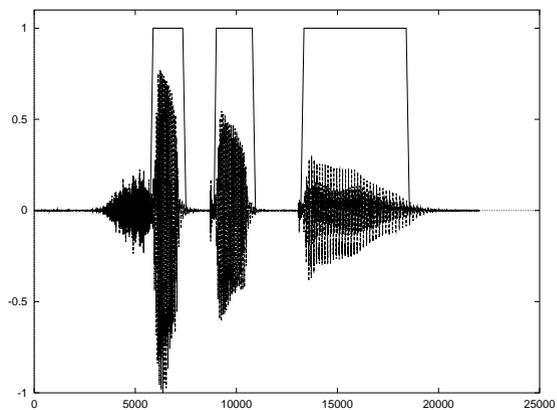
Un signal de parole contient :

- des parties voisées, régulières, modélisables par des sommes d'harmoniques
- des parties non voisées, très irrégulières, en général modélisées par un bruit filtré.

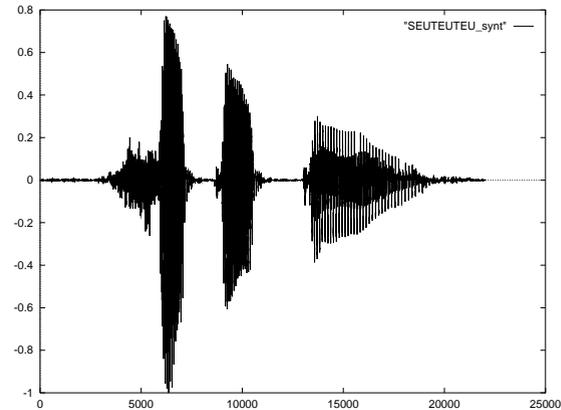
Nous modélisons les zones non voisées en caractérisant leur régularité ponctuelle.



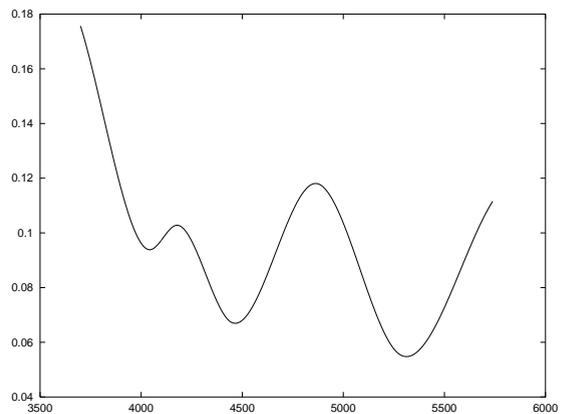
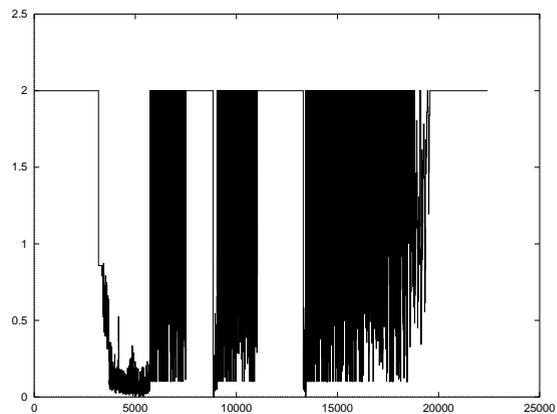
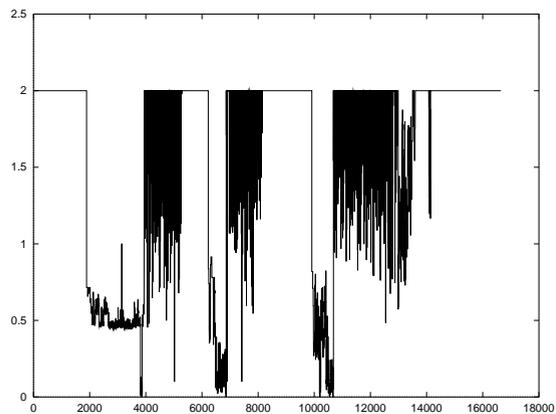
/SEUTEUTEU/ (locuteur "rg").



/SEUTEUTEU/ (locuteur "ob").



SEUTEUTEU/ reconstruit (locuteur "ob").



Fonction de Hölder du locuteur "rg". Fonction de Hölder du locuteur "ob". $\tilde{s}(t)$ de la première partie non voisée(locuteur "ob").

Analyse Multifractale

Au lieu de conserver l'information de régularité en chaque point, il est parfois avantageux de se contenter d'une caractérisation de plus haut niveau : la répartition géométrique ou statistique des points du signal ayant un exposant donné.

Spectre de Hausdorff

$$f_h(\alpha) = \dim_H E_\alpha$$

$$E_\alpha = \{x / \alpha f(x) = \alpha\}$$

$$\dim_H E = \text{dimension de Hausdorff de } E$$

Spectre de grandes déviations

$$\alpha_n^k = -\frac{1}{n} \log |f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})|$$

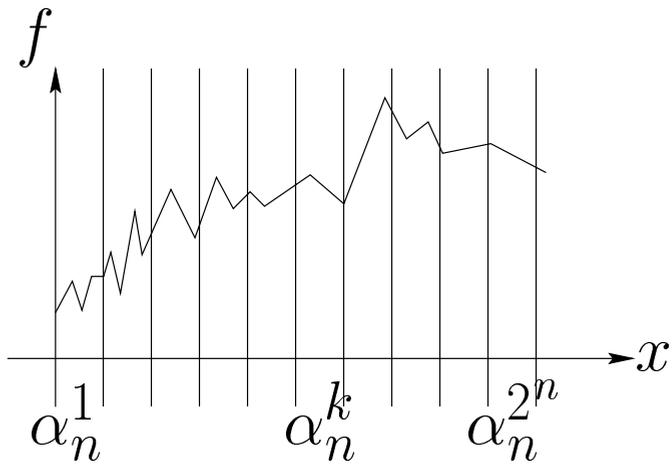
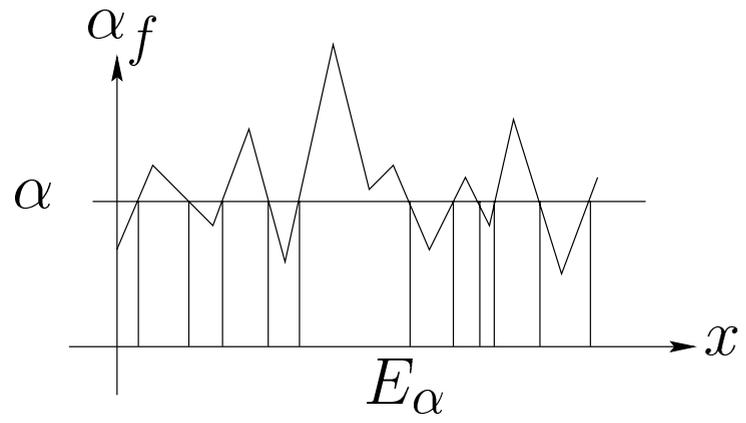
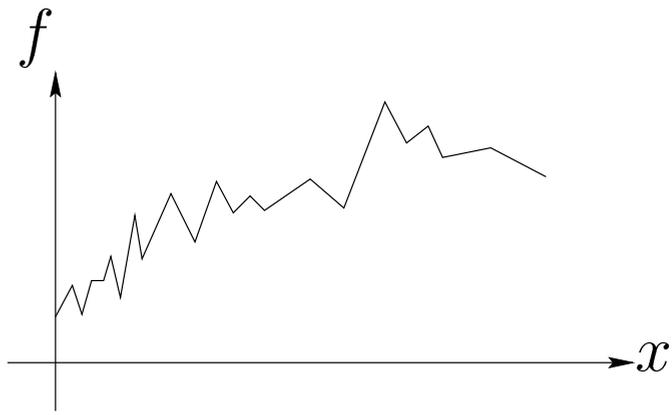
α_n^k est parfois appelé “exposant de grain”

$$f_g(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \log \frac{N_n^\varepsilon(\alpha)}{n}$$
$$N_n^\varepsilon(\alpha) = \mathbf{card}\{k / |\alpha_n^k - \alpha| < \varepsilon\}$$

Autrement dit :

$$P_n(\alpha_n^k \approx \alpha) \sim 2^{-n(1-f_g(\alpha))}$$

où P_n = distribution uniforme sur les dyadiques de taille 2^{-n} .



Théorème : $f_h \leq f_g$

Théorème : L'enveloppe concave de f_g est la fonction de taux de grandes déviations associée à la suite de variables aléatoires

$$Z_n = \log |f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})| \text{ de loi } P_n$$

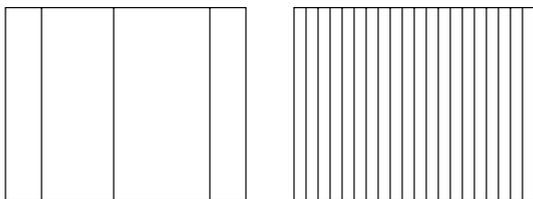
Analyse Fractale des Images

Elle se déroule en 3 étapes :

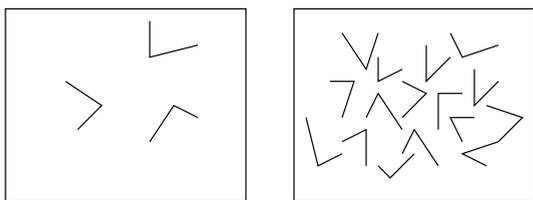
- définition d'une suite de capacités à partir des niveaux de gris de l'image,
- calcul des exposants de Hölder et du spectre $f_g = f_h$,
- classification/traitement de chaque point x sur la base de l'information $(\alpha_x, f(\alpha_x))$.

α_x renseigne, de façon locale ou ponctuelle, sur la régularité de l'image au voisinage de x . Cependant, cette information n'est pas suffisante pour décider, par exemple, que l'on a affaire à un point de contour, et ce pour au moins 2 raisons :

- il n'existe pas de valeur intrinsèque de α que l'on puisse attribuer aux contours, ni même un ensemble de telles valeurs : les valeurs spécifiques obtenues pour une image donnée dépendent des conditions d'acquisition, ou d'une transformation non linéaire de l'image ;
- une information locale seule n'est pas suffisante pour décider si l'on a affaire à un point de contour. C'est le problème difficile des textures : s'il y a "trop" de "contours", l'œil aura plutôt tendance à voir des textures.



Trois contours, une texture.



Trois coins, une texture.

Un point de contour est caractérisé par un α tel que :

- $f_h(\alpha) = 1$ car un contour lisse remplit l'espace comme une ligne ;
- $f_g(\alpha) = 1$ car un point de contour lisse a une probabilité donnée d'apparaître à une résolution fixée.

On peut pousser cette approche plus loin, et *définir* le “type” d'un point à travers la valeur associée de $f_h(\alpha)$.

