Ondelettes pour la prise en compte de conditions aux limites en turbulence incompressible

Souleymane Kadri-Harouna

Directeurs de thèse : **Valérie Perrier, Saïd El Hajji**

Introduction

Hurricane FRAN (NASA-NIX, 4 Sept 1996)

Décadence en turbulence isotrope 2D

Introduction

Quelques caractéristiques :

- Instationnarité, imprédictibilité
- Forte interaction des échelles spatiales et temporelles

Difficultés pour les expériences numériques :

- Paramètres à gérer en fonction du nombre de Reynolds ($Re^{\frac{9}{4}}$ en 3D et $Re^{\frac{6}{4}}$ en 2D)
- Grands moyens en calcul et en temps CPU

Recherche de méthodes efficaces pour la simulation :

- Méthodes spectrales : rapides et performantes $\neq$ conditions aux limites physiques
- Méthode de type éléments finis, volumes finis ou différences finies : adaptation à la géométrie $\neq$ coûteuses en calculs et en mémoire CPU
- $\longrightarrow$ **Méthodes concurrentes en formulation lagrangienne**

Direction de recherche :

$\longrightarrow$ Méthodes de discrétisation en ondelettes pour des conditions aux limites physiques

Introduction

Quelques caractéristiques :

- Instationnarité, imprédictibilité
- Forte interaction des échelles spatiales et temporelles

Difficultés pour les expériences numériques :

- Paramètres à gérer en fonction du nombre de Reynolds ($Re^{\frac{9}{4}}$ en 3D et $Re^{\frac{6}{4}}$ en 2D)
- Grands moyens en calcul et en temps CPU

Recherche de méthodes efficaces pour la simulation :

- Méthodes spectrales : rapides et performantes $\neq$ conditions aux limites physiques
- Méthode de type éléments finis, volumes finis ou différences finies : adaptation à la géométrie $\neq$ coûteuses en calculs et en mémoire CPU
- $\longrightarrow$ **Méthodes concurrentes en formulation lagrangienne**

Direction de recherche :

$\longrightarrow$ Méthodes de discrétisation en ondelettes pour des conditions aux limites physiques

Introduction

Quelques caractéristiques :

- Instationnarité, imprédictibilité
- Forte interaction des échelles spatiales et temporelles

Difficultés pour les expériences numériques :

- Paramètres à gérer en fonction du nombre de Reynolds ($Re^{\frac{9}{4}}$ en 3D et $Re^{\frac{6}{4}}$ en 2D)
- Grands moyens en calcul et en temps CPU

Recherche de méthodes efficaces pour la simulation :

- Méthodes spectrales : rapides et performantes $\neq$ conditions aux limites physiques
- Méthode de type éléments finis, volumes finis ou différences finies : adaptation à la géométrie $\neq$ coûteuses en calculs et en mémoire CPU
- $\longrightarrow$ **Méthodes concurrentes en formulation lagrangienne**

Direction de recherche :

$\longrightarrow$ Méthodes de discrétisation en ondelettes pour des conditions aux limites physiques

- **Équations de Navier-Stokes incompressibles :**

$$(NS)\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nabla\mathbf{p} + f,\ x\in\Omega,\ t\in[0,T] \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0,\ x\in\Omega,\ t\in[0,T] \\ \mathbf{v}(0,x) = \mathbf{v}_0(x),\ x\in\Omega \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_b,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

- **Projection sur l'espace à divergence nulle :**

$$(NSP)\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \nu A\mathbf{v} = -\mathbb{P}[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] + \mathbb{P}(f),\ x\in\Omega,\ t\in[0,T] \\ \mathbf{v}(0,x) = \mathbf{v}_0(x),\ x\in\Omega \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_b,\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

$A = \mathbb{P}\Delta$ et $\mathbb{P}$ projecteur orthogonal sur l'espace à divergence nulle : $\mathbb{P}(\nabla\mathbf{p}) = 0$.

- **Calcul possible de la pression par décomposition de Helmholtz-Hodge :**

$$\nabla\mathbf{p} = \nu\Delta\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbb{P}[\Delta\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}]$$

- **Équations de Navier-Stokes incompressibles :**

$$(NS)\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nabla\mathbf{p} + f, \;\; x\in\Omega, \;\; t\in[0,T] \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \;\; x\in\Omega, \;\; t\in[0,T] \\ \mathbf{v}(0,x) = \mathbf{v}_0(x), \;\; x\in\Omega \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_b, \;\; x\in\partial\Omega \end{cases}$$

- **Projection sur l'espace à divergence nulle :**

$$(NSP)\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \nu A\mathbf{v} = -\mathbb{P}[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] + \mathbb{P}(f), \;\; x\in\Omega, \;\; t\in[0,T] \\ \mathbf{v}(0,x) = \mathbf{v}_0(x), \;\; x\in\Omega \\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_b, \;\; x\in\partial\Omega \end{cases}$$

$A = \mathbb{P}\Delta$ et $\mathbb{P}$ projecteur orthogonal sur l'espace à divergence nulle : $\mathbb{P}(\nabla\mathbf{p}) = 0$.

- **Calcul possible de la pression par décomposition de Helmholtz-Hodge :**

$$\nabla\mathbf{p} = \nu\Delta\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbb{P}[\Delta\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}]$$

Introduction

Résolution numérique du système projeté :

- Intégration de l'équation : $\partial_t \mathbf{v} - \nu A \mathbf{v} = \phi(\mathbf{v})$, avec $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_b$

- Calcul de la projection : $-\mathbb{P}[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] + \mathbb{P}(f)$

Ondelettes à divergence nulle périodiques [Thèse Deriaz 06] **:**

$$\mathbf{v}(t,x) = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(t) \Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(x)$$

$$\partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\mathbb{P}[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}] + \mathbb{P}(f)$$

La pression :

$$\nabla \mathbf{p} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbb{P}[(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}]$$

Résolution numérique du système projeté :

- Intégration de l'équation : $\partial_t \mathbf{v} - \nu A\mathbf{v} = \phi(\mathbf{v})$, avec $\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_b$

- Calcul de la projection : $-\mathbb{P}[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] + \mathbb{P}(f)$

Ondelettes à divergence nulle périodiques [Thèse Deriaz 06] **:**

$$\mathbf{v}(t,x) = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(t)\Psi^{div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(x)$$

$$\partial_t \mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} = -\mathbb{P}[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}] + \mathbb{P}(f)$$

La pression :

$$\nabla \mathbf{p} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \mathbb{P}[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}]$$

Motivations

Nouvelles bases d'ondelettes avec des conditions aux limites :

- Bases d'ondelettes pour $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_{div}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d \ ; \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ \underline{\text{et}} \ \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0\} = \{\mathbf{u} = \mathbf{rot}(\chi); \ \chi \in H_0^1(\Omega)\}$$

- Bases d'ondelettes pour $\mathcal{H}_{rot}(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_{rot}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d \ ; \ \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = 0 \ \underline{\text{et}} \ \mathbf{u} \cdot \vec{\tau} = 0\} = \{\mathbf{u} = \nabla \mathbf{q} \ ; \ \mathbf{q} \in H_0^1(\Omega)\}$$

- Construction d'ondelettes sur l'intervalle [Meyer 91...]
- Ondelettes à divergence nulle vérifiant Dirichlet homogène [Urban 96]

Méthodes de résolution :

- Méthode de projection ou splitting [Chorin 68, Temam 68]
- Méthode de Gauge [W.E-J.Liu 03]

Objectif :

- Définir des nouveaux schémas en combinant les deux aspects

Motivations

Nouvelles bases d'ondelettes avec des conditions aux limites :

- Bases d'ondelettes pour $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_{div}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d \ ; \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ \underline{\text{et}} \ \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0\} = \{\mathbf{u} = \mathbf{rot}(\chi); \ \chi \in H_0^1(\Omega)\}$$

- Bases d'ondelettes pour $\mathcal{H}_{rot}(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_{rot}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d \ ; \ \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = 0 \ \underline{\text{et}} \ \mathbf{u} \cdot \vec{\tau} = 0\} = \{\mathbf{u} = \nabla \mathbf{q} \ ; \ \mathbf{q} \in H_0^1(\Omega)\}$$

- Construction d'ondelettes sur l'intervalle [Meyer 91...]
- Ondelettes à divergence nulle vérifiant Dirichlet homogène [Urban 96]

Méthodes de résolution :

- Méthode de projection ou splitting [Chorin 68, Temam 68]
- Méthode de Gauge [W.E-J.Liu 03]

Objectif :

- Définir des nouveaux schémas en combinant les deux aspects

Motivations

Nouvelles bases d'ondelettes avec des conditions aux limites :

- Bases d'ondelettes pour $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_{div}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d \ ; \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \ \underline{\text{et}} \ \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0\} = \{\mathbf{u} = \mathbf{rot}(\chi); \ \chi \in H_0^1(\Omega)\}$$

- Bases d'ondelettes pour $\mathcal{H}_{rot}(\Omega)$:

$$\mathcal{H}_{rot}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d \ ; \ \mathbf{rot}(\mathbf{u}) = 0 \ \underline{\text{et}} \ \mathbf{u} \cdot \vec{\tau} = 0\} = \{\mathbf{u} = \nabla \mathbf{q} \ ; \ \mathbf{q} \in H_0^1(\Omega)\}$$

- Construction d'ondelettes sur l'intervalle [Meyer 91...]
- Ondelettes à divergence nulle vérifiant Dirichlet homogène [Urban 96]

Méthodes de résolution :

- Méthode de projection ou splitting [Chorin 68, Temam 68]
- Méthode de Gauge [W.E-J.Liu 03]

Objectif :

- Définir des nouveaux schémas en combinant les deux aspects

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- **Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^d$:**
  - Construction [Battle-Federbush 93, Lemarié 92, Urban 96, Urban 00]
  - Algorithmes rapides [Deriaz-Perrier 06]
  - Décomposition de Helmholtz [Urban 00, Deriaz-Perrier 08]

- **Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^d$:**
  - AMR sur $[0,1]^2$ préservant la divergence nulle [Jouini-Lemarié 93]

$$\forall\ \mathbf{u} \in (H^1([0,1]^2))^2,\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\vec{\mathcal{P}}_j(\mathbf{u}) = 0$$

où $\vec{\mathcal{P}}_j$ est le projecteur multi-échelle associé à l'AMR.

$\longrightarrow$ Construction pratique vérifiant des conditions aux limites physiques

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- **Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^d$:**
  - Construction [Battle-Federbush 93, Lemarié 92, Urban 96, Urban 00]
  - Algorithmes rapides [Deriaz-Perrier 06]
  - Décomposition de Helmholtz [Urban 00, Deriaz-Perrier 08]

- **Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^d$:**
  - AMR sur $[0,1]^2$ préservant la divergence nulle [Jouini-Lemarié 93]

$$\forall\, \mathbf{u} \in (H^1([0,1]^2))^2,\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}}_j(\mathbf{u}) = 0$$

où $\vec{\mathcal{P}}_j$ est le projecteur multi-échelle associé à l'AMR.

$\longrightarrow$ Construction pratique vérifiant des conditions aux limites physiques

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

Principe de la construction :

(i) AMR biorthogonale (orthogonale) de $L^2(0,1)$ **régulière** : $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$

- Ce point est classique : V_j^1 AMR quelconque à reproduction polynomiale.

(ii) Construction d'AMR biorthogonale $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ à partir de $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ par dérivation

- Ce point sort du cadre habituel et il vérifie :

$$\frac{d}{dx} V_j^1 = V_j^0 \qquad \frac{d}{dx} \tilde{V}_j^0 \subset \tilde{V}_j^1 \qquad \tilde{V}_j^0 \subset H_0^1(0,1)$$

(iii) Construction d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul sur $[0,1]^d$

- Divergence nulle $\rightarrow$ Rotationnel d'un produit tensoriel de $(d-1)$ espaces V_j^1 et V_j^0
- Rotationnel nul $\rightarrow$ Gradient d'un produit tensoriel d'espaces V_j^1

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(i) **AMR biorthogonale (orthogonale) de** $L^2(0,1)$ **régulière :** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$

- Générateurs orthogonaux [Meyer 91, Andersson et al. 93, ...]
- Générateurs biorthogonaux [Cohen-Daubechies-Vial 93, Dahmen-Urban-Kunoth 97, ...]
- Conditions aux limites homogènes [Chiavassa-Liandrat 97, Monasse-Perrier 99, Masson 99, ...]

Dans ce travail on utilise :

$\longrightarrow$ Adaptation de la construction de [Monasse-Perrier 99] au cas biorthogonal

$\longrightarrow$ Ondelettes de [G.-Talocia-Tabacco 00] sauf biorthogonalisation [Dahmen et al. 97]

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(i) **AMR biorthogonale (orthogonale) de** $L^2(0,1)$ **régulière :** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$

- $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ une AMR biorthogonale (orthogonale) de $L^2(0,1)$ associée à $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$

- Reproduction polynomiale :

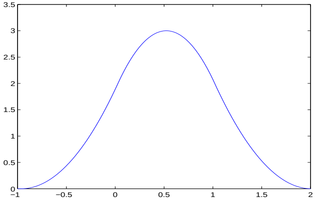
$$0 \leq \ell \leq r-1, \quad \frac{2^{j/2}(2^j x)^\ell}{\ell!} = \Phi_{j,\ell}^{1,\flat}(x) + \sum_{k=k_0}^{2^j-k_1} p_\ell^1(k)\ \varphi_{j,k}^1(x) + \Phi_{j,\ell}^{1,\sharp}(1-x)$$

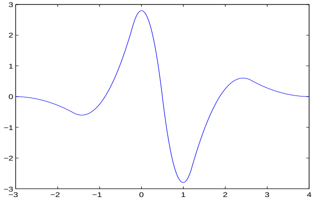
  où $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$ fonctions intérieures, k_0 et k_1 dépendent des supports et des paramètres entiers (δ_0, δ_1)

- L'espace $\tilde{V}_j^1$ a une structure similaire avec $\tilde{r}$ et $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1)$ comme paramètres entiers

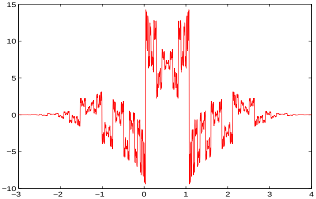
Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

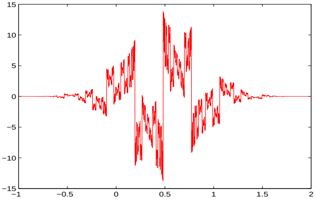
- Fonctions d'échelle φ^1 (gauche) et l'ondelette ψ^1 (droite) : **B-Spline** 3.3





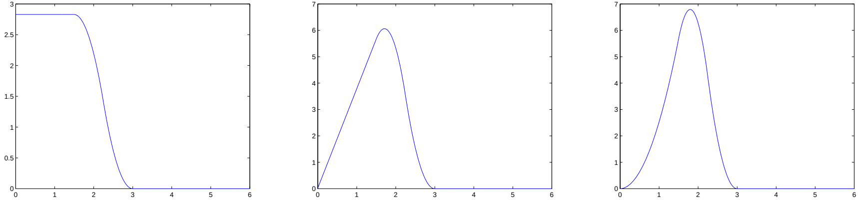
- Fonctions d'échelle $\tilde{\varphi}^1$ (gauche) et l'ondelette $\tilde{\psi}^1$ (droite) : **B-Spline** 3.3



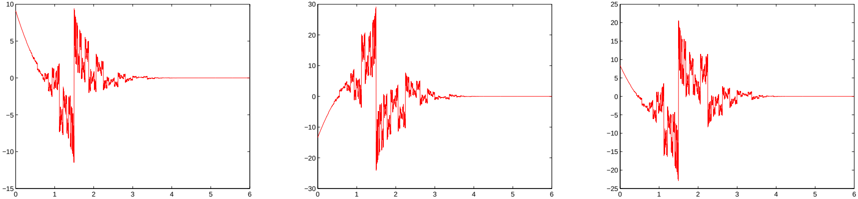


Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- Fonctions d'échelle de bord en 0 de V_j^1 : **B-Spline** 3.3

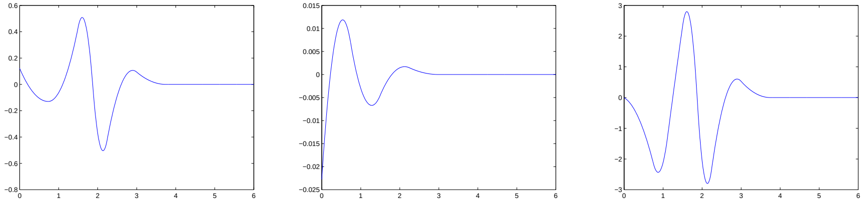


- Fonctions d'échelle de bord en 0 de $\tilde{V}_j^1$: **B-Spline** 3.3

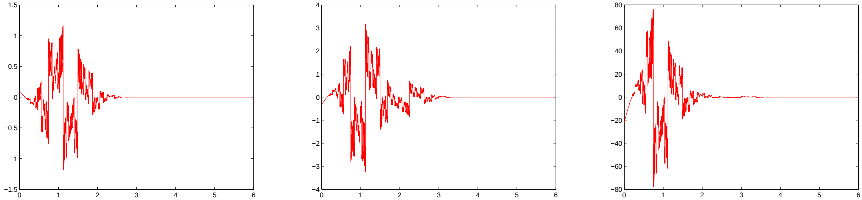


Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- Ondelettes de bord en 0 de W_j^1 : **B-Spline** 3.3



- Ondelettes de bord en 0 de $\tilde{W}_j^1$: **B-Spline** 3.3



Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(i) **AMR biorthogonale (orthogonale) de $L^2(0,1)$ régulière :** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$

- Conditions aux limites homogènes [Monasse-Perrier 99] :

- $f^{(\lambda)}(\alpha) = 0$ pour $0 \leq \lambda \leq r-1$ et $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$

- Il suffit d'enlever de V_j^1 avant biorthogonalisation les fonctions :

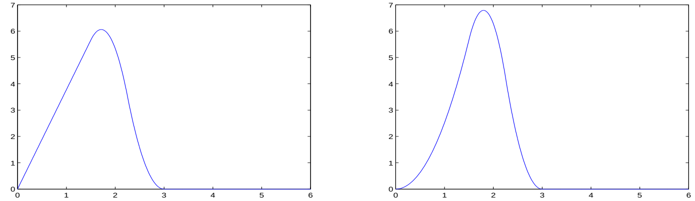
- $\{\Phi_{j,\ell}^{1,\flat}\}_{\ell=\lambda+1}$ si $\alpha = 0$ ou $\{\Phi_{j,\ell}^{1,\sharp}\}_{\ell=\lambda+1}$ si $\alpha = 1$

- On doit ajuster alors la dimension de l'espace $\tilde{V}_j^1$:

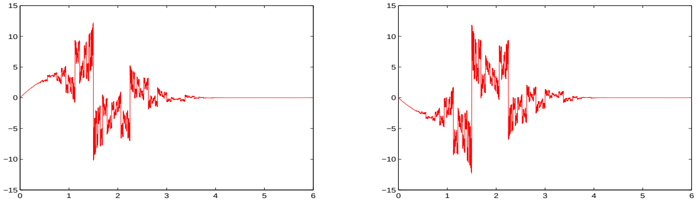
- On peut procéder de même que pour V_j^1

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- Fonctions d'échelle de bord en 0 avec Dirichlet homogène : **B-Spline** 3.3

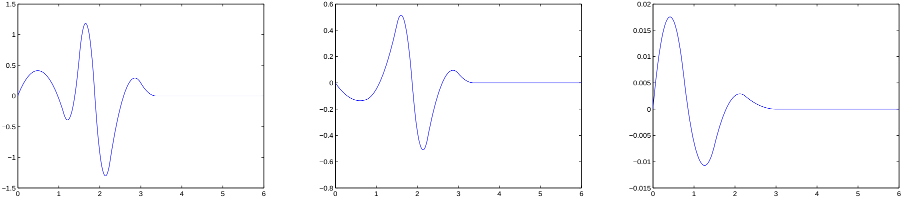


- Fonctions d'échelle de bord en 0 duales avec Dirichlet homogène : **B-Spline** 3.3

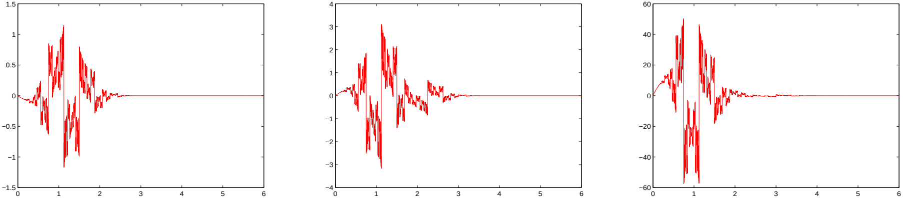


Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- Ondelettes de bord en 0 avec Dirichlet homogène : **B-Spline** 3.3



- Ondelettes de bord en 0 duales avec Dirichlet homogène : **B-Spline** 3.3



Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(ii) **AMRs biorthogonales** $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ **de** $L^2(0,1)$ **reliées à** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ **par dérivation :**

- **Propriété fondamentale [Lemarié 92]** : Soit $\varphi^1 \in \mathcal{C}^{1+\epsilon}$, à support compact, fonction d'échelle de $V_j^1(\mathbb{R})$. Il existe (φ^0, ψ^0), fonction d'échelle et ondelette sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\varphi^1(x))' = \varphi^0(x) - \varphi^0(x-1) \qquad \text{et} \qquad (\psi^1(x))' = 4\ \psi^0(x)$$

  Pour les fonctions duales :

$$(\tilde{\varphi}^0(x))' = \tilde{\varphi}^1(x+1) - \tilde{\varphi}^1(x) \qquad \text{et} \qquad (\tilde{\psi}^0(x))' = -4\ \tilde{\psi}^1(x)$$

- **Conséquences :**

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_j^1(f) = \mathcal{P}_j^0\left(\frac{d}{dx}f\right) \ \text{ et } \ \frac{d}{dx}\tilde{\mathcal{P}}_j^0(f) = \tilde{\mathcal{P}}_j^1\left(\frac{d}{dx}f\right), \quad \forall\ f \in H^1(\mathbb{R})$$

- **Intérêts :** algorithmes rapides en ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

  $\longrightarrow$ **Notre objectif est une construction similaire sur** $[0,1]$

(ii) **AMRs biorthogonales** $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ **de** $L^2(0,1)$ **reliées à** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ **par dérivation :**

- **Propriété fondamentale [Lemarié 92]** : Soit $\varphi^1 \in \mathcal{C}^{1+\epsilon}$, à support compact, fonction d'échelle de $V_j^1(\mathbb{R})$. Il existe (φ^0, ψ^0), fonction d'échelle et ondelette sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\varphi^1(x))' = \varphi^0(x) - \varphi^0(x-1) \qquad \text{et} \qquad (\psi^1(x))' = 4\ \psi^0(x)$$

  Pour les fonctions duales :

$$(\tilde{\varphi}^0(x))' = \tilde{\varphi}^1(x+1) - \tilde{\varphi}^1(x) \qquad \text{et} \qquad (\tilde{\psi}^0(x))' = -4\ \tilde{\psi}^1(x)$$

- **Conséquences :**

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_j^1(f) = \mathcal{P}_j^0(\frac{d}{dx}f) \ \text{ et } \ \frac{d}{dx}\tilde{\mathcal{P}}_j^0(f) = \tilde{\mathcal{P}}_j^1(\frac{d}{dx}f), \quad \forall\ f \in H^1(\mathbb{R})$$

- **Intérêts :** algorithmes rapides en ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

  $\longrightarrow$ **Notre objectif est une construction similaire sur** $[0,1]$

(ii) **AMRs biorthogonales $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ de $L^2(0,1)$ reliées à $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ par dérivation :**

- **Propriété fondamentale [Lemarié 92]** : Soit $\varphi^1 \in \mathcal{C}^{1+\epsilon}$, à support compact, fonction d'échelle de $V_j^1(\mathbb{R})$. Il existe (φ^0, ψ^0), fonction d'échelle et ondelette sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\varphi^1(x))' = \varphi^0(x) - \varphi^0(x-1) \qquad \text{et} \qquad (\psi^1(x))' = 4\ \psi^0(x)$$

  Pour les fonctions duales :

$$(\tilde{\varphi}^0(x))' = \tilde{\varphi}^1(x+1) - \tilde{\varphi}^1(x) \qquad \text{et} \qquad (\tilde{\psi}^0(x))' = -4\ \tilde{\psi}^1(x)$$

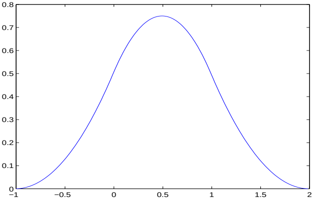
- **Conséquences :**

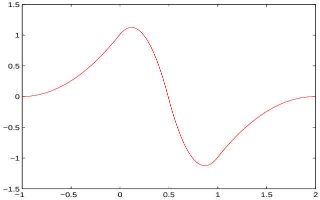
$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}_j^1(f) = \mathcal{P}_j^0(\frac{d}{dx}f) \ \text{ et } \ \frac{d}{dx}\tilde{\mathcal{P}}_j^0(f) = \tilde{\mathcal{P}}_j^1(\frac{d}{dx}f), \quad \forall\ f \in H^1(\mathbb{R})$$

- **Intérêts :** algorithmes rapides en ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

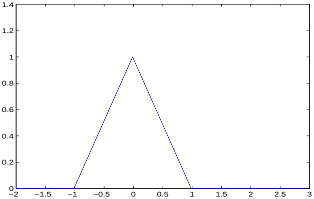
  $\longrightarrow$ **Notre objectif est une construction similaire sur $[0,1]$**

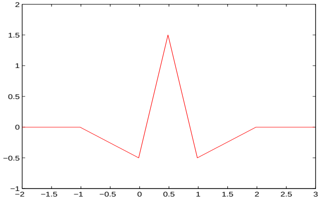
Spline quadratique φ^1 (à gauche) et l'ondelette associée ψ^1 (à droite) :





Spline linéaire φ^0 (à gauche) et l'ondelette associée ψ^0 (à droite) :





Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(ii) **AMRs biorthogonales** $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ **de** $L^2(0,1)$ **reliées à** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ **par dérivation :**

- On considère $(\varphi^0, \tilde{\varphi}^0)$ vérifiant la **propriété fondamentale [Lemarié 92]**

- On construit l'AMR $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ de $L^2(0,1)$ associée à $(\varphi^0, \tilde{\varphi}^0)$:

- Dérivation intéreure : $\frac{d}{dx}\varphi_{j,k}^1 = 2^j[\varphi_{j,k}^0 - \varphi_{j,k+1}^0]$ et $\frac{d}{dx}\tilde{\varphi}_{j,k}^0 = 2^j[\tilde{\varphi}_{j,k-1}^1 - \tilde{\varphi}_{j,k}^1]$
- Reproduction polynomiale : $(r-2)$ pour V_j^0 et $\tilde{r}$ pour $\tilde{V}_j^0$

- En gardant les mêmes paramètres entiers (δ_0, δ_1) et $(\tilde{\delta}_0, \tilde{\delta}_1)$ que pour $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$:

- Relation de dérivation au bord en 0 :

$$(\Phi_0^{1,\flat})' = -\varphi_{k_0}^0 \qquad\qquad (\Phi_\ell^{1,\flat})' = \Phi_{\ell-1}^{0,\flat} - \tilde{p}_\ell^1(k_0-1)\ \varphi_{k_0}^0$$

- Relation similaire pour $\tilde{V}_j^0$ et en 1 en utilisant la transformation : $Tf(x) = f(1-x)$

- Égalité des dimensions et commutation des projecteurs : $\tilde{V}_j^0 \subset H_0^1(0,1)$

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(ii) **AMRs biorthogonales** $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ **de** $L^2(0,1)$ **reliées à** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ **par dérivation :**

Proposition

$$(a) \quad \frac{d}{dx} V_j^1 = V_j^0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \circ \mathcal{P}_j^1 f = \mathcal{P}_j^0 \circ \frac{d}{dx} f, \quad \forall\, f \in H^1$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \tilde{V}_j^0 \subset \tilde{V}_j^1 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \circ \tilde{\mathcal{P}}_j^0 f = \tilde{\mathcal{P}}_j^1 \circ \frac{d}{dx} f, \quad \forall\, f \in H_0^1$$

$(\mathcal{P}_j^1, \tilde{\mathcal{P}}_j^1)$ et $(\mathcal{P}_j^0, \tilde{\mathcal{P}}_j^0)$ projecteurs obliques respectivement sur $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ et $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$

- **Définition des ondelettes de** W_j^0 **et** $\tilde{W}_j^0$ (idée de [Jouini-Lemarié 93]) :

$$\psi_{j,k}^0 = 2^{-j} \frac{d}{dx} \psi_{j,k}^1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi}_{j,k}^0 = -2^j \int_0^x \tilde{\psi}_{j,k}^1, \qquad (k : \text{bord et intérieur confondu})$$

⟶ Nouveauté : **les ondelettes de bords sortent du cadre habituel** [Meyer 91, Masson 99, Monasse-Perrier 99,...]

⟶ Relation à deux échelles ⟶ FWT

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(ii) **AMRs biorthogonales** $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$ **de** $L^2(0,1)$ **reliées à** $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ **par dérivation :**

Proposition

$$(a) \quad \frac{d}{dx} V_j^1 = V_j^0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \circ \mathcal{P}_j^1 f = \mathcal{P}_j^0 \circ \frac{d}{dx} f, \quad \forall\, f \in H^1$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} \tilde{V}_j^0 \subset \tilde{V}_j^1 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \circ \tilde{\mathcal{P}}_j^0 f = \tilde{\mathcal{P}}_j^1 \circ \frac{d}{dx} f, \quad \forall\, f \in H_0^1$$

$(\mathcal{P}_j^1, \tilde{\mathcal{P}}_j^1)$ et $(\mathcal{P}_j^0, \tilde{\mathcal{P}}_j^0)$ projecteurs obliques respectivement sur $(V_j^1, \tilde{V}_j^1)$ et $(V_j^0, \tilde{V}_j^0)$

- **Définition des ondelettes de** W_j^0 **et** $\tilde{W}_j^0$ (idée de [Jouini-Lemarié 93]) :

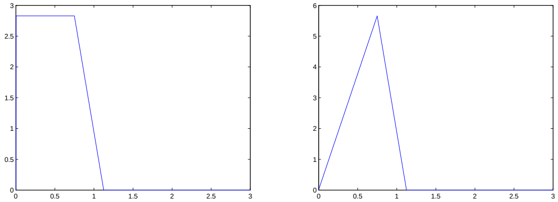
$$\psi_{j,k}^0 = 2^{-j} \frac{d}{dx} \psi_{j,k}^1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\psi}_{j,k}^0 = -2^j \int_0^x \tilde{\psi}_{j,k}^1, \qquad (k : \text{bord et intérieur confondu})$$

$\longrightarrow$ Nouveauté : **les ondelettes de bords sortent du cadre habituel** [Meyer 91, Masson 99, Monasse-Perrier 99,...]

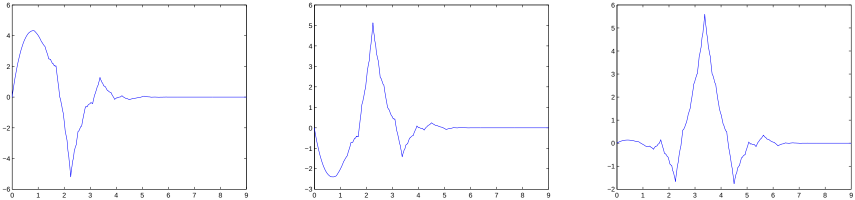
$\longrightarrow$ Relation à deux échelles $\longrightarrow$ **FWT**

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- Fonctions d'échelle de bord en 0 de V_j^0 **(espace dérivé) :** $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$ B-Spline 3.3

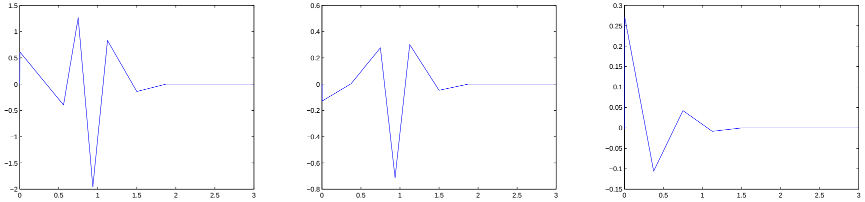


- Fonctions d'échelle de bord en 0 de $\tilde{V}_j^0 \subset H_0^1(0,1)$ **(espace intégré) :** $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$ B-Spline 3.3

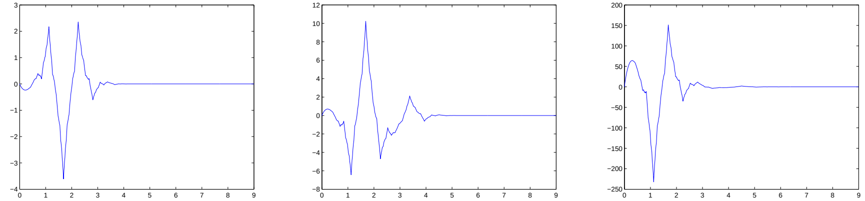


Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

- Ondelettes de bord en 0 de W_j^0 **(par dérivation) :** $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$ B-Spline 3.3



- Ondelettes de bord en 0 de $\tilde{W}_j^0 \subset H_0^1(0,1)$ **(par intégration) :** $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$ B-Spline 3.3



Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(iii) **Construction d'ondelettes à divergence nulle 2D de $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$:**

- **Analyse multirésolution à divergence nulle $\mathbb{V}_j^{div}$:**

$$\mathbb{V}_j^{div} = \text{vect} < \Phi_{j,\mathbf{k}}^{\text{div}} >, \quad j \geq j_{min}, \ \mathbf{k} = (k_1, k_2)$$

- **Fonctions d'échelle à divergence nulle sur $[0,1]^2$:**

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}^{\text{div}} = \mathbf{rot}[\varphi_{j,k_1}^d \otimes \varphi_{j,k_2}^d] = \left| \begin{array}{l} \varphi_{j,k_1}^d \otimes (\varphi_{j,k_2}^d)' \\ -(\varphi_{j,k_1}^d)' \otimes \varphi_{j,k_2}^d \end{array} \right. , \quad \varphi_{j,k}^d \in V_j^d = V_j^1 \cap H_0^1$$

(Comme $\frac{d}{dx} V_j^1 = V_j^0$)

$$\longrightarrow \ \mathbb{V}_j^{div} = (V_j^1 \otimes V_j^0) \times (V_j^0 \otimes V_j^1) \cap \mathcal{H}_{div}([0,1]^2) \ \longrightarrow \ \textbf{FWT !}$$

- **Ondelettes à divergence nulle anisotropes sur $[0,1]^2$:**

$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} = \mathbf{rot}[\psi_{j_1,k_1}^d \otimes \psi_{j_2,k_2}^d] = \left| \begin{array}{l} 2^{j_2} \psi_{j_1,k_1}^d \otimes \psi_{j_2,k_2}^0 \\ -2^{j_1} \psi_{j_1,k_1}^0 \otimes \psi_{j_2,k_2}^d \end{array} \right. \qquad (\psi_{j,k}^0 = 2^{-j} \frac{d}{dx} \psi_{j,k}^1)$$

$\mathbf{j} = (j_1, j_2)$, avec $j_1, j_2 \geq j_{min}$

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

(iii) **Construction d'ondelettes à rotationnel nul 2D de $\mathcal{H}_{rot}(\Omega)$:**

- **Analyse multirésolution à rotationnel nul $\mathbb{V}_j^{rot}$:**

$$\mathbb{V}_j^{rot} = \text{vect} < \mathbf{\Phi}^{\mathrm{rot}}_{j,\mathbf{k}} >, \quad j \geq j_{min}, \ \mathbf{k} = (k_1, k_2)$$

- **Fonctions d'échelle à rotationnel nul sur $[0,1]^2$:**

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{rot}}_{j,\mathbf{k}} \quad = \quad \nabla[\varphi^d_{j,k_1} \otimes \varphi^d_{j,k_2}] = \left| \begin{array}{l} (\varphi^d_{j,k_1})' \otimes \varphi^d_{j,k_2} \\ \varphi^d_{j,k_1} \otimes (\varphi^d_{j,k_2})' \end{array} \right. \quad , \quad \varphi^d_{j,k} \in V^d_j = V^1_j \cap H^1_0$$

(Comme $\frac{d}{dx} V_j^1 = V_j^0$)

$$\longrightarrow \quad \mathbb{V}_j^{rot} \subset (V_j^0 \otimes V_j^1) \times (V_j^1 \otimes V_j^0) \cap \mathcal{H}^{\perp}_{div}([0,1]^2) \quad \longrightarrow \quad \textbf{FWT !}$$

- **Ondelettes à rotationnel nul anisotropes sur $[0,1]^2$:**

$$\mathbf{\Psi}^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \nabla[\psi^d_{j_1,k_1} \otimes \psi^d_{j_2,k_2}] = \left| \begin{array}{l} 2^{j_1} \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^d_{j_2,k_2} \\ 2^{j_2} \psi^d_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \end{array} \right. \qquad (\psi^0_{j,k} = 2^{-j} \frac{d}{dx} \psi^1_{j,k})$$

$\mathbf{j} = (j_1, j_2)$, avec $j_1, j_2 \geq j_{min}$

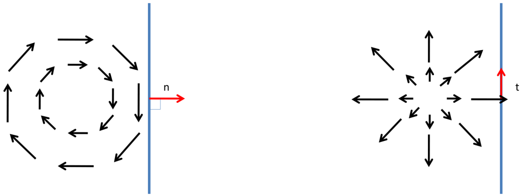
Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

Conditions aux limites pour $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$:

- Normale nulle au bord : $V_j^d = V_j^1 \cap H_0^1(0,1) \longrightarrow \Phi_{j,\mathbf{k}}^{\mathrm{div}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$
- Dirichlet homogène : $V_j^d = V_j^1 \cap H_0^2(0,1) \longrightarrow \Phi_{j,\mathbf{k}}^{\mathrm{div}}|_\Gamma = 0$

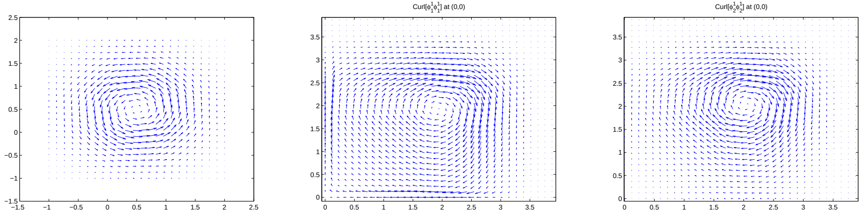
Conditions aux limites pour $\mathcal{H}_{rot}(\Omega)$:

- Tangente nulle au bord : $V_j^d = V_j^1 \cap H_0^1(0,1) \longrightarrow \Phi_{j,\mathbf{k}}^{\mathrm{rot}} \cdot \vec{\tau} = 0$
- Dirichlet homogène : $V_j^d = V_j^1 \cap H_0^2(0,1) \longrightarrow \Phi_{j,\mathbf{k}}^{\mathrm{rot}}|_\Gamma = 0$

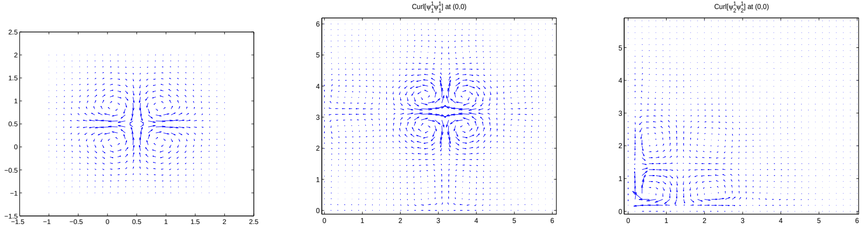


Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

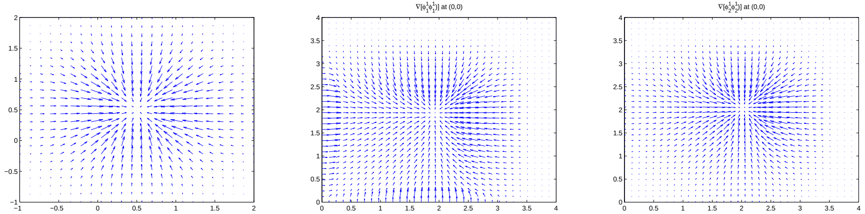
Exemple de fonction d'échelle à divergence nulle sur $[0,1]^2$: $\Phi^{\text{div}}_{j,\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$



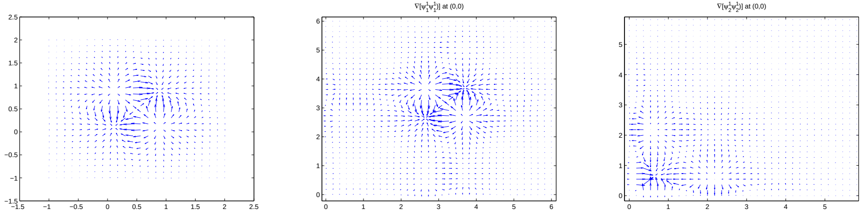
Exemple d'ondelettes à divergence nulle sur $[0,1]^2$: $\Psi^{\text{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$



Exemple de fonctions d'échelle à rotationnel nul sur $[0,1]^2$: $\Phi^{\mathrm{rot}}_{j,\mathbf{k}} \cdot \vec{\tau} = 0$



Exemple d'ondelettes à rotationnel nul sur $[0,1]^2$: $\Psi^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \cdot \vec{\tau} = 0$



Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

Les fonctions duales :

- Fonctions d'échelle :

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathrm{div}}_{j,\mathbf{k}} = \left| \begin{array}{l} \tilde{\varphi}^{d}_{j,k_1} \otimes \tilde{\gamma}_{j,k_2} \\ -\tilde{\gamma}_{j,k_1} \otimes \tilde{\varphi}^{d}_{j,k_2} \end{array} \right. \qquad \tilde{\mathbf{\Phi}}^{\mathrm{rot}}_{j,\mathbf{k}} = \left| \begin{array}{l} \tilde{\gamma}_{j,k_1} \otimes \tilde{\varphi}^{+}_{j,k_2} \\ \varphi^{+}_{j,k_1} \otimes \tilde{\gamma}_{j,k_2} \end{array} \right. \quad , \quad \tilde{\gamma}_{j,k} = -\int_0^x \tilde{\varphi}^{1}_{j,k}$$

- Ondelettes :

$$\tilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \left| \begin{array}{l} 2^{j_2}\tilde{\psi}^{d}_{j_1,k_1} \otimes \tilde{\psi}^{0}_{j_2,k_2} \\ -2^{j_1}\tilde{\psi}^{0}_{j_1,k_1} \otimes \tilde{\psi}^{d}_{j_2,k_2} \end{array} \right. \qquad \tilde{\mathbf{\Psi}}^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \left| \begin{array}{l} 2^{j_1}\tilde{\psi}^{0}_{j_1,k_1} \otimes \tilde{\psi}^{d}_{j_2,k_2} \\ 2^{j_2}\tilde{\psi}^{d}_{j_1,k_1} \otimes \tilde{\psi}^{0}_{j_2,k_2} \end{array} \right.$$

$\longrightarrow$ **Normalisation** $\longrightarrow$ **Algorithmes rapides**

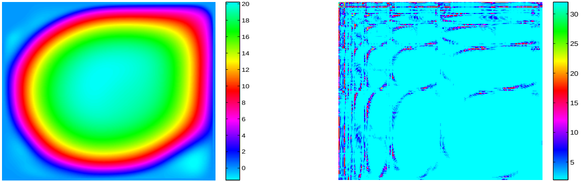


Figure: Coeffs d'échelle (à gauche) et d'ondelettes (à droite) : $(\varphi^1, \tilde{\varphi}^1)$ B-Spline 3.3 et $j = 8$.

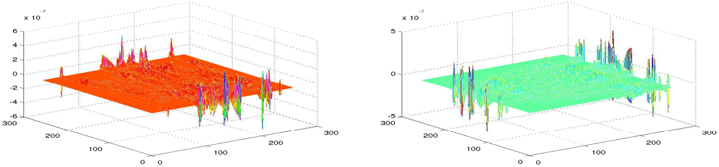


Figure: Résidus sur **u**1 (à gauche) et **u**2 (à droite) : 22% de coeffs à div-nulle retenus.

Approximation non linéaire :

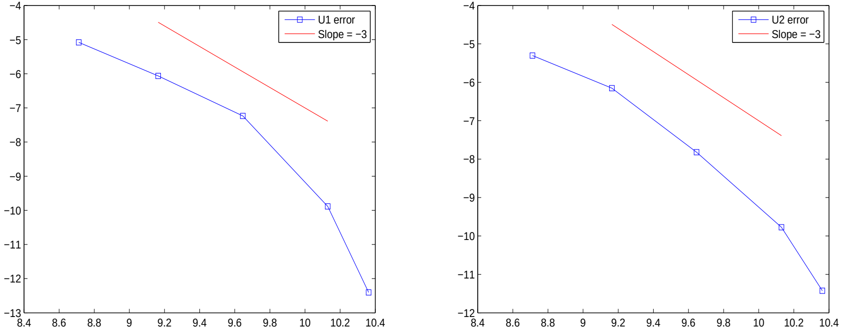


Figure: Erreur ℓ^2 sur $\mathbf{u}_1$ (à gauche) et $\mathbf{u}_2$ (à droite) : échelle loglog (en X nombre de coeffs retenus et en Y l'erreur).

Ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul

Cas des dimensions supérieures

- Divergence nulle :

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}^{1,\mathrm{div}} = \mathbf{rot}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \varphi_{j,k_1}^{d} \otimes \varphi_{j,k_2}^{d} \otimes (\varphi_{j,k_3}^{d})' \end{array}\right. \qquad \Phi_{j,\mathbf{k}}^{2,\mathrm{div}} = \mathbf{rot}\left|\begin{array}{l} (\varphi_{j,k_1}^{d})' \otimes \varphi_{j,k_2}^{d} \otimes \varphi_{j,k_3}^{d} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{1,\mathrm{div}} = \mathbf{rot}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \psi_{j_1,k_1}^{1} \otimes \psi_{j_2,k_2}^{1} \otimes \psi_{j_3,k_3}^{0} \end{array}\right. \qquad \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{2,\mathrm{div}} = \mathbf{rot}\left|\begin{array}{l} \psi_{j_1,k_1}^{0} \otimes \psi_{j_2,k_2}^{1} \otimes \psi_{j_3,k_3}^{1} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

$\longrightarrow$ $(d-1)$ fonctions d'échelle et $(2^d-1)(d-1)$ ondelettes libres

- Rotationnel nul :

$$\Phi_{j,\mathbf{k}}^{\mathrm{rot}} = \nabla[\varphi_{j,k_1}^{d} \otimes \varphi_{j,k_2}^{d} \otimes \varphi_{j,k_3}^{d}] \qquad \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\mathrm{rot}} = \nabla[\psi_{j_1,k_1}^{d} \otimes \psi_{j_2,k_2}^{d} \otimes \psi_{j_3,k_3}^{d}]$$

Plan de l'exposé

Décomposition de Helmholtz-Hodge par ondelettes

Définitions [Girault-Raviart 86] **:**

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, **ouvert borné connexe de frontière** $\Gamma = \partial\Omega$ **régulière** :

$$(L^2(\Omega))^d = \mathcal{H}_{div}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{rot}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{har}(\Omega)$$

avec

$$\mathcal{H}_{har}(\Omega) = \{\mathbf{u} = \nabla \mathbf{h} \ ; \ \mathbf{h} \in H^1(\Omega) \ \underline{\text{et}} \ \Delta \mathbf{h} = 0\}$$

- Décomposition unique de tout $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d$: $\chi \in H^1_0(\Omega)$, $\mathbf{q} \in H^1_0(\Omega)$ et $\Delta \mathbf{h} = 0$

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}(\chi) + \nabla \mathbf{q} + \nabla \mathbf{h} \ \text{ dans } \ \Omega$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{rot}(\chi)] = 0, \quad \mathbf{rot}[\nabla \mathbf{q}] = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot [\nabla \mathbf{h}] = 0 = \mathbf{rot}[\nabla \mathbf{h}]$$

Somme orthogonale : $\int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{p} + \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{v} \ \mathbf{p} = \int_\Gamma \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{n}} \ \mathbf{p}$

Calculs pratiques :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \mathbf{u}_{\mathrm{rot}} + \mathbf{u}_{\mathrm{har}}$$

Alors :

$$\langle \mathbf{u} / \Psi^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle = \langle \mathbf{u}_{\mathrm{div}} / \Psi^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \mathbf{u} / \Psi^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle = \langle \mathbf{u}_{\mathrm{rot}} / \Psi^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle$$

On cherche $\mathbf{u}_{\mathrm{div}}$ et $\mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$ sous la forme :

$$\mathbf{u}_{\mathrm{div}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \ \Psi^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{u}_{\mathrm{rot}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \ \Psi^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$$

Ce qui donne :

$$(d^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = \mathbb{M}^{-1}_{\mathrm{div}}(\langle \mathbf{u} / \Psi^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle) \qquad \text{et} \qquad (d^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}) = \mathbb{M}^{-1}_{\mathrm{rot}}(\langle \mathbf{u} / \Psi^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} \rangle)$$

$\mathbb{M}_{\mathrm{div}}$ et $\mathbb{M}_{\mathrm{rot}}$: matrices de Gram des bases $(\Psi^{\mathrm{div}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})$ et $(\Psi^{\mathrm{rot}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})$ respectivement.

$$\mathbf{u}_{\mathrm{har}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathrm{div}} - \mathbf{u}_{\mathrm{rot}}$$

Propriétés :

- **En dimension deux d'espace :**

$$\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad \text{(idem en périodique)}$$

Alors

$\longrightarrow$ $\mathbb{M}_{\rm div}$ = Matrice du Laplacien scalaire 2D $\longrightarrow$ **préconditionneur diagonal !**

- **La structure tensorielle** des bases donne :

$$[\mathbb{M}_{\rm div}(d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\rm div})] = \mathbf{M}[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\rm div}]\mathbf{R} + \mathbf{R}[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\rm div}]\mathbf{M}$$

avec **M** et **R** les matrices de masse et de raideur de la base 1D $(\psi_{j,k}^d)$.

- $\mathbb{M}_{\rm rot}$ **matrice du Laplacien scalaire quelque soit la dimension**

Propriétés :

- **En dimension deux d'espace :**

$$\forall\ \mathbf{u},\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad \text{(idem en périodique)}$$

Alors

$\longrightarrow$ $\mathbb{M}_{\rm div}$ = Matrice du Laplacien scalaire 2D $\longrightarrow$ **préconditionneur diagonal !**

- **La structure tensorielle** des bases donne :

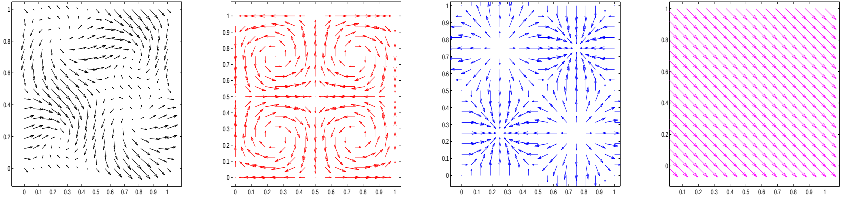
$$[\mathbb{M}_{\rm div}(d^{\rm div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}})] = \mathbf{M}[d^{\rm div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{R} + \mathbf{R}[d^{\rm div}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\mathbf{M}$$

avec **M** et **R** les matrices de masse et de raideur de la base 1D $(\psi^d_{j,k})$.

- $\mathbb{M}_{\rm rot}$ **matrice du Laplacien scalaire quelque soit la dimension**

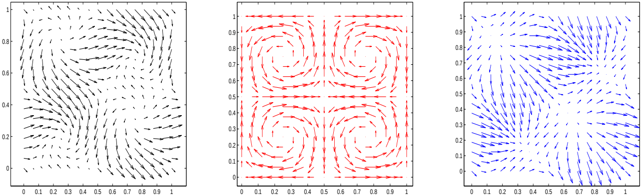
Décomposition de Helmholtz-Hodge par ondelettes

- **Décomposition de Helmholtz-Hodge :**



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \mathbf{u}_{\mathrm{rot}} + \mathbf{u}_{\mathrm{har}}$$

- **Décomposition de Helmholtz :** $\mathbf{u}_{\mathrm{div}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$



$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{div}} + \nabla \mathbf{q}$$

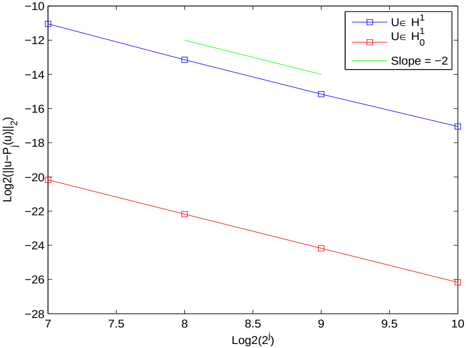


Figure: Erreur H^1 sur **u** et l'erreur H^1_0 sur **v** : générateurs B-Spline 3.3

$$\mathbf{u} = \mathbf{curl}[\cos(4\pi x)x(1-x)\cos(4\pi y)y(1-y)] \in H^1(\Omega)$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{curl}[\sin(4\pi x)x^3(1-x)^3\sin(4\pi y)y^3(1-y)^3] \in H^1_0(\Omega)$$

Plan de l'exposé

Nouveaux schémas numériques pour Navier-Stokes

Schémas en temps-méthode de projection classique :

- Calcul de la vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v}^* = \mathbf{v}_b, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la pression, puis de la vitesse :

$$\begin{cases} \delta t \Delta \mathbf{p}_{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0, \text{ dans } \Omega \\ \nabla \mathbf{p}_{n+1} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}^* - \delta t \nabla \mathbf{p}_{n+1}, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_b, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Méthode de projection modifiée

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v}^* = \mathbf{v}_b, \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{v}^*) \end{cases}$$

Schémas en temps-méthode de projection classique :

- Calcul de la vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v}^* = \mathbf{v}_b, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la pression, puis de la vitesse :

$$\begin{cases} \delta t \Delta \mathbf{p}_{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0, \text{ dans } \Omega \\ \nabla \mathbf{p}_{n+1} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}^* - \delta t \nabla \mathbf{p}_{n+1}, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_b, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Méthode de projection modifiée

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_n}{\delta t} - \nu \Delta \mathbf{v}^* + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{v}^* = \mathbf{v}_b, \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{v}^*) \end{cases}$$

Schémas en temps-méthode de Gauge classique : $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \nabla\chi$

- Calcul de la vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{a}_n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{a}_{n+1} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{a}_{n+1} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_b \cdot \vec{\mathbf{n}}, \ \mathbf{a}_{n+1} \cdot \vec{\tau} = \mathbf{v}_b \cdot \vec{\tau} + 2\frac{\partial \chi_n}{\partial \vec{\tau}} - \frac{\partial \chi_{n-1}}{\partial \vec{\tau}}, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la vitesse :

$$\begin{cases} \Delta\chi_{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{a}_{n+1}, \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1} - \nabla\chi_{n+1} \end{cases}$$

Méthode de Gauge modifiée

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{a}_n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{a}_{n+1} + (\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{a}_{n+1} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_b \cdot \vec{\mathbf{n}}, \ \mathbf{a}_{n+1} \cdot \vec{\tau} = \mathbf{v}_b \cdot \vec{\tau} + 2\frac{\partial \chi_n}{\partial \vec{\tau}} - \frac{\partial \chi_{n-1}}{\partial \vec{\tau}}, \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{a}_{n+1}) \end{cases}$$

Schémas en temps-méthode de Gauge classique : $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \nabla\chi$

- Calcul de la vitesse intermédiaire :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{a}_n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{a}_{n+1} + (\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{a}_{n+1}\cdot\vec{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_b\cdot\vec{\mathbf{n}},\ \mathbf{a}_{n+1}\cdot\vec{\tau} = \mathbf{v}_b\cdot\vec{\tau} + 2\frac{\partial\chi_n}{\partial\vec{\tau}} - \frac{\partial\chi_{n-1}}{\partial\vec{\tau}}, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Calcul de la vitesse :

$$\begin{cases} \Delta\chi_{n+1} = \nabla\cdot\mathbf{a}_{n+1}, \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial\chi_{n+1}}{\partial\vec{\mathbf{n}}} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1} - \nabla\chi_{n+1} \end{cases}$$

Méthode de Gauge modifiée

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{a}_{n+1}-\mathbf{a}_n}{\delta t} - \nu\Delta\mathbf{a}_{n+1} + (\mathbf{v}_n\cdot\nabla)\mathbf{v}_n = 0, \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{a}_{n+1}\cdot\vec{\mathbf{n}} = \mathbf{v}_b\cdot\vec{\mathbf{n}},\ \mathbf{a}_{n+1}\cdot\vec{\tau} = \mathbf{v}_b\cdot\vec{\tau} + 2\frac{\partial\chi_n}{\partial\vec{\tau}} - \frac{\partial\chi_{n-1}}{\partial\vec{\tau}}, \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{v}_{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{a}_{n+1}) \end{cases}$$

Discrétisation en espace de la méthode de projection modifiée 2D :

- Méthode de Galerkin dans $\vec{\mathbf{V}}_j = (V_j^1 \otimes V_j^0) \times (V_j^0 \otimes V_j^1) +$ conditions aux limites

- Séparation d'échelles :

$$\mathbf{v}_1(t,x) = \sum_{|\mathbf{j}|<j,\ \mathbf{k}} d^1_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(t)\ \psi^1_{j_1,k_1} \otimes \psi^0_{j_2,k_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2(t,x) = \sum_{|\mathbf{j}|<j,\ \mathbf{k}} d^2_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(t)\ \psi^0_{j_1,k_1} \otimes \psi^1_{j_2,k_2}$$

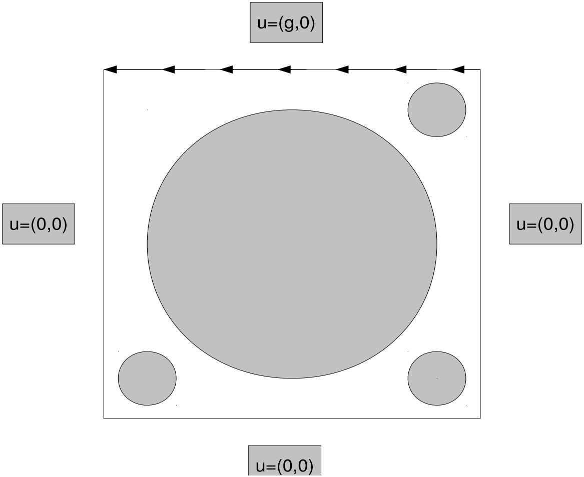
$\longrightarrow$ Un système d'ODE sur les coefficients : $d^{\epsilon,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = d^{\epsilon}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(n\delta t)$ et $d^{\epsilon,*,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = d^{\epsilon,*}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(n\delta t)$

$$\mathcal{A}^1_{\delta t}\ [d^{1,*,n+1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{A}^0_{\delta t} = \mathbf{M}^1\ [d^{1,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathbf{M}^0 - \delta t \mathbf{M}^1\ ([(\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n]_1)\ \mathbf{M}^0$$
$$\mathcal{A}^0_{\delta t}\ [d^{2,*,n+1}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathcal{A}^1_{\delta t} = \mathbf{M}^0\ [d^{2,n}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}]\ \mathbf{M}^1 - \delta t \mathbf{M}^0\ ([(\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n]_2)\ \mathbf{M}^1$$

$\mathbf{M}^\epsilon$, $\mathcal{A}^1_{\delta t}$ matrice de masse et matrice de l'opérateur $(1-\delta t \nu \Delta)$ sur la base de $\{V_j^\epsilon\}_{\epsilon=0,1}$

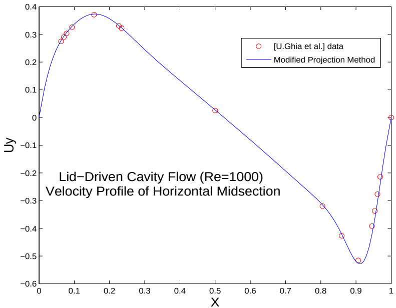
$\longrightarrow$ **Chaque pas de temps demande le calcul du projecteur $\mathbb{P}$**

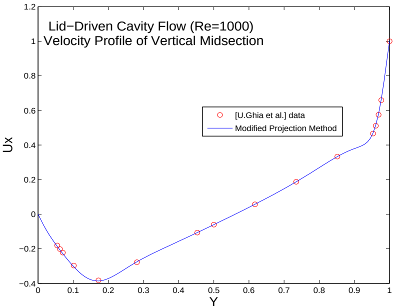
Problème test étudié : cavité entraînée



Nouveaux schémas numériques pour Navier-Stokes

Validation : Profils des vitesses horizontale et verticale au centre

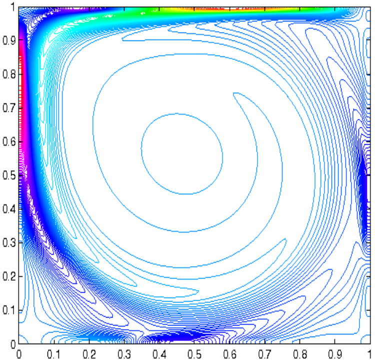


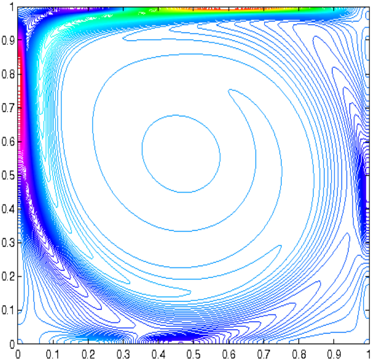


Méthode de projection modifiée $Re = 1000$: vitesse horizontale (à gauche) et vitesse verticale (à droite) pour $j = 7$ et $\mathbf{v}_b = 1$.

Données de référence : [U.Ghia et al. 82]

Profil de la vorticité :

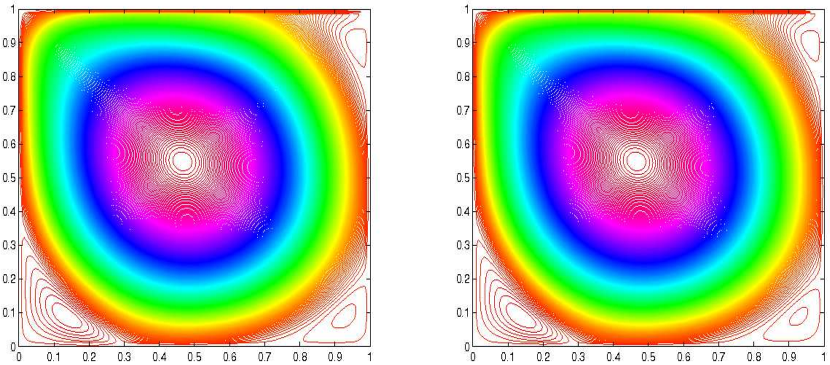




Isocontours de la vorticité à $t = 30$. Méthode de projection modifiée (à gauche) et méthode de Gauge modifiée (à droite) pour $Re = 2000$, $j = 7$ et $\mathbf{v}_b = 16x^2(1-x)^2$.

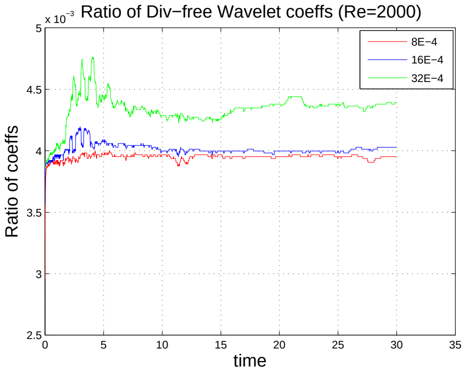
Nouveaux schémas numériques pour Navier-Stokes

Profil des coefficients d'échelle à divergence nulle :



Isocontours des coeffs d'échelle à divergence nulle à $t = 30$. Méthode de projection modifiée (à gauche) et méthode de Gauge modifiée (à droite) pour $Re = 2000$, $j = 7$ et $\mathbf{v}_b = 16x^2(1-x)^2$.

Évolution de la complexité sur les ondelettes à divergence nulle :



Évolution en temps du pourcentage des coefficients d'ondelettes supérieurs à ϵ fixé : $\epsilon = 8.10^{-4}$, $\epsilon = 16.10^{-4}$, $\epsilon = 32.10^{-4}$. B-Spline 3.3 pour $j = 8$ et $\mathbf{v}_b = 16x^2(1-x)^2$

Cavité entraînée à Reynolds grand :

Évolution de la vorticité : $Re = 50000$, $j = 9$ et $\mathbf{v}_b = 16x^2(1-x)^2$.

Plan de l'exposé

Conclusion-Perspectives

1. **Nouvelles bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul**
2. **Décomposition de Helmholtz-Hodge**
3. **Résolution de Navier-Stokes avec conditions aux limites physiques**
4. **Extension de la construction à d'autres types de géométrie**
5. **Prise en compte de l'adaptativité dans Navier-Stokes**
6. **Méthode variationnelle multi-échelle par ondelettes**

Conclusion-Perspectives

1. **Nouvelles bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul**
2. **Décomposition de Helmholtz-Hodge**
3. **Résolution de Navier-Stokes avec conditions aux limites physiques**
4. **Extension de la construction à d'autres types de géométrie**
5. **Prise en compte de l'adaptativité dans Navier-Stokes**
6. **Méthode variationnelle multi-échelle par ondelettes**

Conclusion-Perspectives

1. Nouvelles bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul
2. Décomposition de Helmholtz-Hodge
3. Résolution de Navier-Stokes avec conditions aux limites physiques
4. Extension de la construction à d'autres types de géométrie
5. Prise en compte de l'adaptativité dans Navier-Stokes
6. Méthode variationnelle multi-échelle par ondelettes

Conclusion-Perspectives

1. Nouvelles bases d'ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul
2. Décomposition de Helmholtz-Hodge
3. Résolution de Navier-Stokes avec conditions aux limites physiques
4. Extension de la construction à d'autres types de géométrie
5. Prise en compte de l'adaptativité dans Navier-Stokes
6. Méthode variationnelle multi-échelle par ondelettes

Rebond de paire de vortex :

Évolution de la vorticité : $\nu = 1/4000$ et $j = 9$.

Quelques Simulations

Reconnection de vortex :

Module de vorticité : $j = 6$

Vorticité dans le plan de reconnection : $j = 6$