
Une méthode de Gauge pour Navier-Stokes
incompressible utilisant des ondelettes à divergence
nulle ou à rotationnel nul

Souleymane Kadri-Harouna, Valérie Perrier

Laboratoire Jean Kuntzmann LJK Grenoble France

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Équations de Navier-Stokes incompressibles

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert *régulier* et $T > 0$. On considère le problème de Cauchy pour les équations de **Navier-Stokes incompressibles** suivant :

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \mathbf{p} = \mathbf{f}, & x \in \Omega, t \in [0, T] \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, & x \in \Omega, t \in [0, T] \\ \mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0(x), & x \in \Omega \\ \mathbf{v} = 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases}$$

Inconnues : la vitesse $\mathbf{v}(t, x)$ et la pression $\mathbf{p}(t, x)$

\mathbf{f} = somme des forces extérieures. On suppose $\mathbf{f} = 0$ dans la suite.

$\nu > 0$ la viscosité cinématique du fluide.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \nabla \mathbf{p} = \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_d} \right)$$

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Problème lié au calcul de la pression

En prenant la divergence de l'équation du bilan de la quantité du mouvement dans (NS) , on obtient :

$$-\Delta \mathbf{p} = \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \quad (1)$$

Les conditions aux limites naturelles imposées à l'équation (1), d'après (NS) , sont :

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = \nu \vec{\mathbf{n}} \cdot \Delta \mathbf{v}$$

$\vec{\mathbf{n}}$ vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$.

→ Problème de calcul du terme $\Delta \mathbf{v}$ sur le bord du domaine $\partial\Omega$.

→ Discrétisation particulière avec la méthode de projection [Chorin 68, Temam 68, Goda 79].

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Méthode de Gauge

[W. E-J. Liu 03, P. Caussignac 07]

La méthode de **Gauge** consiste à introduire ce changement de variable :

$$\mathbf{a} = \mathbf{v} + \nabla\chi \quad \Rightarrow \quad \Delta\chi = \nabla \cdot \mathbf{a}$$

Avec le système (NS), cela donne :

$$\partial_t \mathbf{a} - \nu \Delta \mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \partial_t \chi - \nu \Delta \chi$$

Flexibilité par rapport aux conditions aux limites :

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{a} \cdot \vec{\tau} = \frac{\partial \chi}{\partial \vec{\tau}}$$

ou

$$\chi = 0 \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{n}} \quad \mathbf{a} \cdot \vec{\tau} = 0$$

$\vec{\tau}$ vecteur tangent à $\partial\Omega$.

→ Le calcul de χ demande la résolution d'un problème de Poisson !

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes sous cette formulation, il faut donc être capable de :

(i) Résoudre une équation de la chaleur sur \mathbf{a} :

$$\partial_t \mathbf{a} - \nu \Delta \mathbf{a} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

(ii) Calculer \mathbf{v} à partir de \mathbf{a} .

Pour répondre au point (i), on va utiliser une [méthode de Galerkin](#) sur base d'ondelettes.

Pour le point (ii), on va utiliser la [décomposition de Helmholtz-Hodge](#) par ondelettes à divergence nulle ou à rotationnel nul.

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Décomposition de Helmholtz-Hodge

[Girault-Raviart 86]

- Pour $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné connexe et *régulier*, on a :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge \chi + \nabla q + h \rightarrow \text{unique}$$

avec

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \chi) = 0, \quad \nabla \wedge (\nabla q) = 0, \quad \nabla \cdot h = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \wedge h = 0$$

- En terme d'espaces, on obtient :

$$(L^2(\Omega))^d = \mathcal{H}_{div}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{div,1}^\perp(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{div,2}^\perp(\Omega) \rightarrow \text{somme orthogonale}$$

où

$$\mathcal{H}_{div}(\Omega) = \{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d ; \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ et } \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$\vec{\mathbf{n}}$ vecteur normal unitaire sortant sur $\partial\Omega$.

$$\mathcal{H}_{div,1}^\perp(\Omega) = \{ \nabla q ; q \in H_0^1(\Omega) \} \text{ et } \mathcal{H}_{div,2}^\perp(\Omega) = \{ \nabla q ; q \in H^1(\Omega) \text{ et } \Delta q = 0 \}$$

Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, vérifie des conditions aux limites de Dirichlet homogènes, on a :

$$\begin{aligned}(H_0^1(\Omega))^d &= \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^d ; \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ &= \mathcal{H}_{div,0}(\Omega) \oplus \mathcal{H}_{div,0}^\perp(\Omega)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{div,0}(\Omega) &= \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^d ; \mathbf{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ et } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\ &= \{\mathbf{u} = \mathbf{rot}(\chi) ; \chi \in H^1(\Omega), \mathbf{rot}(\chi) \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \frac{\partial \chi}{\partial \vec{\mathbf{n}}} = 0\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{div}^\perp(\Omega) &= \{\mathbf{u} = (-\Delta_0^{-1})(\nabla q) ; q \in L^2(\Omega)\} \\ &\subset \{\nabla q ; q \in H^2(\Omega)\}\end{aligned}$$

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Bases d'ondelettes pour $\mathcal{H}_{div}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{div}^\perp(\Omega)$

- **Ondelettes à divergence nulle 2D :**

$$\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{div} = \nabla \wedge [\psi_{j_1, k_1}^1 \otimes \psi_{j_2, k_2}^1] = \begin{vmatrix} 2^{j_2} \psi_{j_1, k_1}^1 \otimes \psi_{j_2, k_2}^0 \\ -2^{j_1} \psi_{j_1, k_1}^0 \otimes \psi_{j_2, k_2}^1 \end{vmatrix} \quad (\psi^1)' = 4\psi^0$$

- **Ondelettes à rotationnel nul 2D :** $\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{rot} = \nabla[\psi_{j_1, k_1}^1 \otimes \psi_{j_2, k_2}^1]$

→ $\{\psi_{j,k}^1 = 2^{j/2} \psi^1(2^j x - k)\}$ base d'ondelettes 1D assez régulière

-Cas **périodique** ou sur \mathbb{R}^d [Lemarié 92, Urban 96, Deriaz-Perrier 06],
sur $[0, 1]^d$ avec **conditions aux limites physiques** [Kadri-Perrier 10].

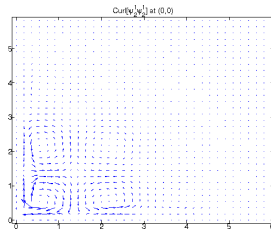
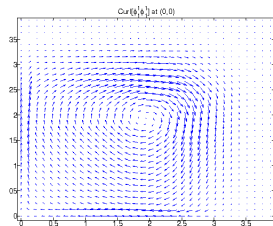


Figure: Exemple de fonction d'échelle (à gauche) et ondelette (à droite) de bord à divergence nulle en $(0,0)$ vérifiant $\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$: ψ^1 est le B-Spline 3.3

Décomposition de Helmholtz-Hodge par ondelettes

- **Décomposition de Helmholtz-Hodge :**

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{div}} + \nabla q \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{div}} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{\text{div}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad (\text{non périodique})$$

Alors :

$$\langle \mathbf{u} / \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \rangle = \langle \mathbf{u}_{\text{div}} / \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \rangle$$

où $\{\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}}\}$ est une base d'ondelettes de $\mathcal{H}_{\text{div}}(\Omega)$. On cherche \mathbf{u}_{div} sous la forme :

$$\mathbf{u}_{\text{div}} = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k}} d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}}$$

Ce qui donne :

$$(d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}}) = \mathbb{M}^{-1}(\langle \mathbf{u} / \Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}} \rangle)$$

avec \mathbb{M} la matrice de Gram de la base $(\Psi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}})$.

→ En périodique, on peut utiliser la base de Fourier !

Propriétés

- **En dimension deux d'espace**, on a :

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \mathbf{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (\text{pareil en périodique})$$

Alors

→ \mathbb{M} = Matrice du Laplacien scalaire 2D → **préconditionneur explicite !**

- **La structure tensorielle** des bases donne :

$$[\mathbb{M}^{\text{div}}(d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}})] = \mathbf{M}[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}}]\mathbf{R} + \mathbf{R}[d_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{\text{div}}]\mathbf{M}$$

avec \mathbf{M} et \mathbf{R} les matrices de masse et de raideur des bases d'ondelettes 1D.

Exemple d'analyse d'un champ à divergence nulle

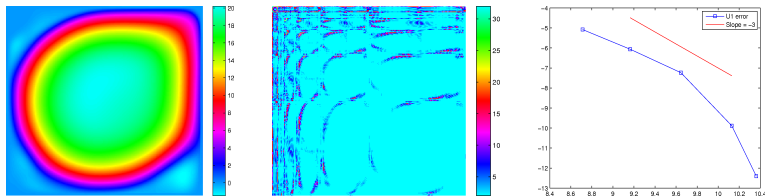


Figure: Coefficients d'échelle, d'ondelettes et l'erreur d'approximation non linéaire sur \mathbf{u}_1 (de gauche vers droite). Base à divergence nulle : ψ^1 B-Spline 3.3.

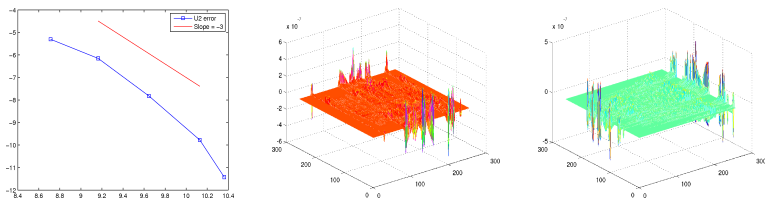


Figure: Erreur d'approximation non linéaire sur \mathbf{u}_2 , résidus sur \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 reconstitués avec 22% de leurs coefficients à divergence nulle.

Exemple de décomposition

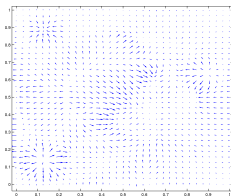
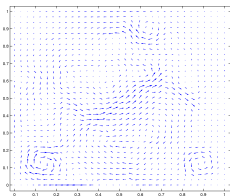
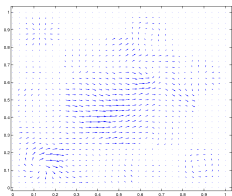


Figure: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{div}} + \mathbf{u}_{\text{rot}}$

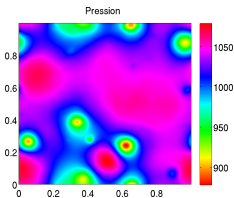
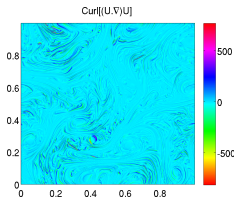
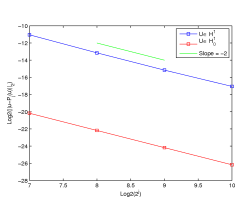


Figure: Erreur de projection à divergence nulle dans H^1 et H_0^1 (à gauche), vorticité de $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{div}} + \nabla p$ (au centre) et la pression p (à droite).

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Schéma numérique en temps

- **Crank-Nicolson** pour la diffusion et **Adams-Bashforth** pour la convection. Soient $\mathbf{a}^n \simeq \mathbf{a}(n\delta t, \mathbf{x})$ et δt le pas de temps choisi, on a :

$$\frac{\mathbf{a}^{n+1} - \mathbf{a}^n}{\delta t} = -(\mathbf{v}^{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n+1/2} + \frac{\nu}{2}\Delta(\mathbf{a}^{n+1} + \mathbf{a}^n)$$

$$\mathbf{a}^{n+1} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{a}^{n+1} \cdot \vec{\tau} = \frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial \vec{\tau}} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbb{P}(\mathbf{a}^{n+1})$$

avec :

$$(\mathbf{v}^{n+1/2} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n+1/2} = \frac{3}{2}(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\mathbf{v}^n - \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n-1} \quad \text{et} \quad \nabla \chi^{n+1} = 2\nabla \chi^n - \nabla \chi^{n-1}$$

\mathbb{P} projecteur orthogonal de $(L^2([0, 1]^2))^2$ sur $\mathcal{H}_{div,0}([0, 1]^2)$.

Attention ! Contrainte de stabilité sur le pas de temps : $\delta t \leq C(\delta x)^{4/3}$

Plan

1 Introduction

- Equations de Navier-Stokes incompressibles
- Problème lié au calcul de la pression
- Méthode de Gauge

2 Décomposition de Helmholtz-Hodge

- Définitions
- Calcul par ondelettes de la décomposition de Helmholtz-Hodge

3 Méthode de Gauge modifiée par ondelettes

- Schéma numérique en temps
- Schéma numérique en espace

4 Conclusion et Perspectives

Schéma numérique en espace

On cherche les composantes de la solution approchée \mathbf{a}^n sous la forme :

$$\mathbf{a}_1^n = \sum_{|\mathbf{j}| < j, \mathbf{k}} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{1,n} \psi_{j_1, k_1}^1 \otimes \psi_{j_2, k_2}^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_2^n = \sum_{|\mathbf{j}| < j, \mathbf{k}} d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{2,n} \psi_{j_1, k_1}^0 \otimes \psi_{j_2, k_2}^1$$

En utilisant la factorisation du noyau de la chaleur sur base d'ondelettes, on a :

$$\mathcal{R}_{\frac{\delta t}{2}}^1 [d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{1,n+1}] \mathcal{R}_{\frac{\delta t}{2}}^0 = \mathcal{R}_{-\frac{\delta t}{2}}^1 [d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{1,n}] \mathcal{R}_{-\frac{\delta t}{2}}^0 - \delta t \mathbf{M}^1 (\mathbb{P}[(\mathbf{v}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1/2}]_1) \mathbf{M}^0$$

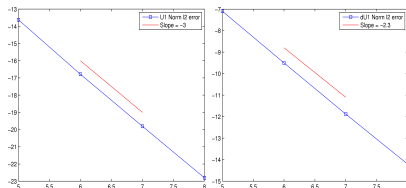
et

$$\mathcal{R}_{\frac{\delta t}{2}}^0 [d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{2,n+1}] \mathcal{R}_{\frac{\delta t}{2}}^1 = \mathcal{R}_{-\frac{\delta t}{2}}^0 [d_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}^{2,n}] \mathcal{R}_{-\frac{\delta t}{2}}^1 - \delta t \mathbf{M}^0 (\mathbb{P}[(\mathbf{v}^{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1/2}]_2) \mathbf{M}^1$$

\mathbf{M}^ϵ : matrice de masse 1D de la base $\{\psi_{j,k}^\epsilon\}$, pour $\epsilon = 0, 1$.

$\mathcal{R}_\alpha^\epsilon$: matrice de rigidité 1D de $(1 - \alpha\Delta)$ dans la base $\{\psi_{j,k}^\epsilon\}$, pour $\epsilon = 0, 1$.

Validation numérique



$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \cos t. (\sin \pi x)^2. \sin 2\pi y \\ \mathbf{u}_2 &= -\cos t. \sin 2\pi x. (\sin \pi y)^2 \\ \chi &= 0.25 \cos t. [(2 + \cos \pi x). (2 + \cos \pi y)] \end{aligned}$$

Échelle logarithmique pour l'erreur : \log_2
Base d'ondelettes B-Spline 3.3.

Figure: Erreur ℓ^2 et h^1 .

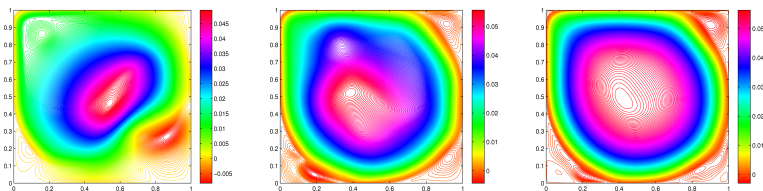


Figure: Coeffs d'échelle à div-nulle à $t = 20, 50, 80$, pour $\nu = 10^{-4}$ et une trace $g = -16x^2(1-x)^2$. La résolution est de $j = 8$.

Complexité

Soit $N = 2^j$, avec j la résolution la plus fine. Les principales étapes du schéma demandent :

- Le calcul du terme $(\mathbf{u}_{n+1/2} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{n+1/2}$ en différences finies et sa projection sur $(\psi_{j_1, k_1}^1 \otimes \psi_{j_2, k_2}^0, \psi_{j_1, k_1}^0 \otimes \psi_{j_2, k_2}^1)$. Le coût de cette étape est de $O(N^2)$.
- La résolution d'une équation de la chaleur sur \mathbf{a} . Le coût de cette étape est de $O(rN^2)$ opérations.
- Le calcul de la décomposition de Helmholtz-Hodge de \mathbf{a} . Le coût de cette étape est de $O(rN^2)$

→ r est le nombre d'éléments par ligne de la matrice de raideur de la base d'ondelettes 1D considérée.

Interaction de 3 tourbillons (cas périodique)

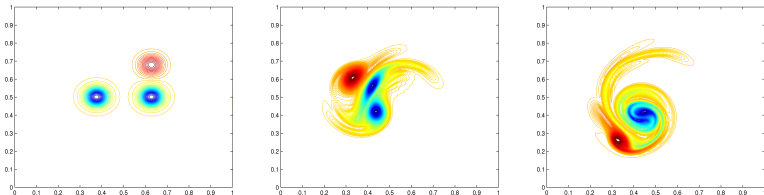


Figure: Vorticité à $t = 0, 10, 20$, pour $\nu = 3.8 \cdot 10^{-6}$ et $j = 8$.

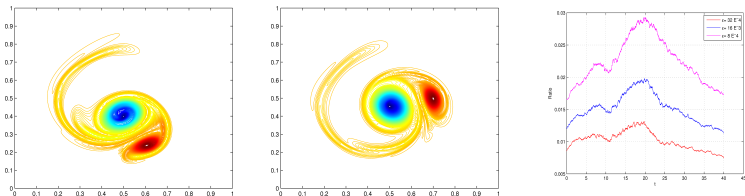


Figure: Vorticité à $t = 30, 40$. Pourcentage de coeffs d'ondelette à div-nulle au dessus d'un certain seuil ϵ fixé : $\epsilon = 8 \cdot 10^{-4}, 16 \cdot 10^{-4}, 32 \cdot 10^{-4}$.

Cavité entraînée

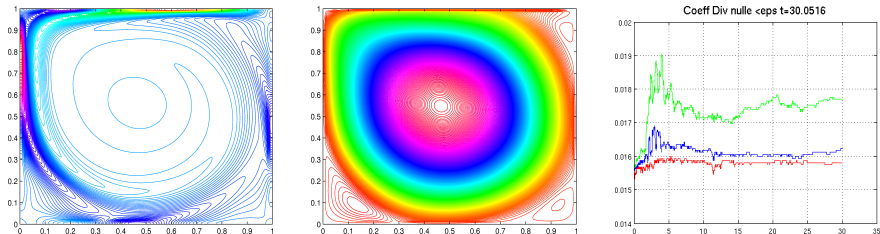


Figure: Contours de vorticité à $t = 30$ et coeffs d'échelle à div-nulle, pour $Re = 2000$. Pourcentage de coeffs d'ondelette à div-nulle au dessus d'un certain seuil ϵ fixé : $\epsilon = 8 \cdot 10^{-4}$, $16 \cdot 10^{-4}$, $32 \cdot 10^{-4}$.

Conclusion et Perspectives

- 1 **Décomposition de Helmholtz-Hodge sur le carré**
- 2 **Résolution de Navier-Stokes avec conditions aux limites physiques**
- 3 **Prise en compte de l'adaptativité de bases d'ondelettes**
- 4 **Méthode variationnelle multi-échelle (sans modèle)**
- 5 **Étude des modèles de turbulence de sous-maille**