

# INCERTITUDES DE MESURES PIV PAR FLOT OPTIQUE

Dominique HEITZ<sup>a,b,\*</sup>, Patrick HÉAS<sup>c</sup>, Cédric HERZET<sup>c</sup>

<sup>a</sup>. Cemagref, UR TERE, 17 avenue de Cucillé, 35044 Rennes Cedex

<sup>b</sup>. Université européenne de Bretagne, Rennes, France

<sup>c</sup>. INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

\*. dominique.heiz@cemagref.fr

---

## Résumé

L'estimation des incertitudes de mesures PIV est un problème difficile. L'accès à cette information est possible pour des techniques de type flot optique basées sur une modélisation des connaissances entre l'image et le champ de vitesse à estimer. Nous montrons dans cette étude que la formulation probabiliste de ces modèles dans un cadre bayésien permet de prendre en compte les sources d'incertitudes et de déterminer une incertitude de mesure. La nouvelle approche fournit une cartographie des incertitudes de mesures et apporte un cadre pour l'analyse des *a priori* introduits dans les techniques de mesures PIV.

**Mots Clés : PIV ; Flot optique ; Incertitudes ; Bayes ; Turbulence**

---

## 1 Introduction

Depuis une dizaine d'années les techniques de vélocimétrie par images de particules (PIV) sont de plus en plus utilisées pour la mesure de la turbulence. Si l'estimation des incertitudes de mesures de ces méthodes est d'un intérêt évident, elle n'en reste pas moins un défi. Pourtant, les techniques de PIV utilisant une modélisation explicite des phénomènes physiques, peuvent se reformuler de manière probabiliste dans un cadre bayésien pour prendre en compte les sources d'incertitudes et fournir une incertitude de mesure.

Pour estimer les incertitudes associées à une mesure de vitesse il faut modéliser le problème en établissant la relation de dépendance entre la vitesse et les grandeurs d'entrées. L'identification des sources d'incertitudes, puis l'estimation des incertitudes associées à ces sources permet de calculer une incertitude résultante sur la mesure de la vitesse. La démarche proposée par le guide pour l'expression de l'incertitude de mesure, nommé GUM, normalise la façon de propager les incertitudes lorsque l'on dispose d'une fonctionnelle reliant la grandeur estimée aux variables contenant des incertitudes (JCGM, 100 :2008). Le supplément du GUM élargit l'approche à la propagation des distributions à l'aide de simulations de Monte Carlo (JCGM, 101 :2008). Cette démarche pourrait s'appliquer aux problème inverse de l'estimation du mouvement dans les images. Toutefois, à notre connaissance, cette approche de propagation des distributions n'a pas encore été appliquée en PIV. De plus cette approche ne détaille pas explicitement les incertitudes liées aux modèles constituant la méthode de mesure. Par exemple, dans le cas de mesures PIV s'appuyant sur des techniques de corrélation, l'incertitude serait associée à la méthode et au modèle utilisés pour estimer la position du pic de corrélation, ainsi qu'à l'*a priori* de vitesse constante dans la fenêtre d'interrogation. De manière générale dans la mesure du mouvement à partir d'image il s'agit de l'incertitude associée à la détermination d'un minimum ou d'un maximum d'une fonctionnelle composée d'un modèle d'observation et d'un modèle de régularisation, encore appelé *a priori*. Cette incertitude peut pourtant être considérable. De plus, elle apporte des informations précieuses sur la confiance associée à la mesure. Des estimations de cette quantité sont possibles si le problème est formulé dans un cadre probabiliste. L'objectif de cette étude est de formuler le problème de l'estimation *globale* du mouvement de manière probabiliste dans un cadre bayésien, de façon à fournir pour chaque vecteur vitesse estimé son incertitude.

L'article est organisé comme suit. Dans une première partie, l'estimation déterministe du flot optique est présenté pour deux modèles de régularisations. Puis la technique est reformulée de manière probabiliste dans un cadre d'estimation bayésienne. Enfin, dans une dernière partie de résultats et discussions, la méthode d'estimation des incertitude est évaluée à partir d'image de particules transportées dans un écoulement turbulent.

## 2 Approche variationnelle

**Modèle d'observation** La mesure du mouvement entre deux images utilise un modèle d'observation ou terme d'attache aux données reliant le vecteur champ de vitesse recherché aux variations spatiotemporelles de l'intensité du niveau de gris des images. Dans cette étude nous considérons le modèle variationnel classique traduisant la conservation de la luminance en chaque point de l'image par l'expression,

$$I_t + {}^t\mathbf{v} \cdot I_s = 0, \quad (1)$$

où

$$I_s = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix},$$

et  $I_t, I_x, I_y$  sont les dérivées partielles de l'image par rapport au temps et à l'espace, et  ${}^t\mathbf{v} = (u, v)$  est le champ de vitesse apparent, également appelé flot optique.

Cette expression fait l'hypothèse que les variations d'intensité dans l'image ne sont dues qu'au mouvement apparent. Les variations d'intensités liées à la source d'éclairage ou à la caméra peuvent être pré-filtrées ou encore modélisées en tant que terme additionnel dans l'expression (1). Pour des images de particules éclairées par une nappe laser et déplacées par un écoulement tridimensionnel, la variation d'intensité correspond également aux particules qui sortent de la nappe laser notamment en raison de la composante de vitesse hors plan d'observation. Ce phénomène peut être très fortement réduit en choisissant un pas de temps entre image tel que le déplacement moyen soit suffisamment inférieur à l'épaisseur de la nappe laser. Par ailleurs, le choix d'un petit déplacement moyen entre images est consistant avec la formulation variationnelle et l'hypothèse de linéarité du modèle d'observation. Le lecteur pourra se référer aux travaux de Liu & Shen (2008) pour plus de détails sur la façon dont le terme d'attache aux données est dérivé des équations de la dynamique des fluides.

La fonctionnelle d'énergie associée au terme d'attache aux données s'écrit,

$$f_d(I, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (I_t + {}^t\mathbf{v} \cdot I_s)^2 ds, \quad (2)$$

où  $\Omega$  correspond au domaine de l'image.

**Modèle de régularisation** Le modèle d'observation n'est pas suffisant pour estimer le champ de vitesse car il ne fournit qu'une équation scalaire sur la luminance pour deux composantes de la vitesse à estimer dans le plan de l'image. Seules les composantes de la vitesse perpendiculaires aux gradients de la luminance peuvent être estimées. Ce problème peut être résolu par l'ajout de contraintes appliquées sur un voisinage (approches *locales*) ou sur l'ensemble de l'image (approches *globales*) (Heitz *et al.*, 2010).

Les méthodes *locales* comparent le contenu d'une fenêtre d'observation dans la première image avec les contenus de fenêtres similaires dans la seconde image, ceci pour un critère donné. Les techniques de corrélation sont classiquement utilisées en PIV, tandis que les images compensées en mouvement proposées par Lucas & Kanade (1981) sont couramment utilisées dans la communauté vision par ordinateur.

Dans la suite de cette étude nous considérons des méthodes *globales*. Ces techniques résolvent un problème d'optimisation sur l'ensemble de l'image, reliant chaque vecteur estimé à ces voisins selon un modèle de régularisation plus ou moins pondéré. A l'origine de ce type d'approche Horn & Schunck (1981) ont proposé une régularisation au premier ordre pour estimer les mouvements quasi-rigides. La fonctionnelle d'énergie associée à cette régularisation s'écrit,

$$f_r(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) ds. \quad (3)$$

Des régularisations d'ordre plus élevé, plus adapté au mouvement fluide, ont été développées (Corpetti *et al.*, 2006; Dérian *et al.*, 2011). Récemment, la régularisation multiéchelle proposée par Héas *et al.* (2011), basée sur une modélisation de la physique des fluides, permet d'estimer de manière précise la structuration des écoulements aux petites échelles. La méthode consiste à contraindre le champ de vitesse –*via* la fonction de structure d'ordre deux– à suivre les modèles statistique prédits par Kolmogorov (Frisch, 1995). La fonctionnelle d'énergie associée à cette technique s'écrit,

$$f_r(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left( S_2(\ell) - \beta \ell^{\zeta_2} \right)^2, \quad (4)$$

où  $S_2(\ell)$  est la fonction de structure longitudinale d'ordre 2,  $\zeta_2$  son exposant et  $\beta$  le taux de transfert d'énergie inter-échelles.

**Estimation du flot optique** L'estimation du champ de vitesse se fait par la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie composée du terme d'observation et du terme de régularisation

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \min_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}, I),$$

où  $f(\mathbf{v}, I) = f_d(I, \mathbf{v}) + \alpha f_r(\mathbf{v})$  et  $\alpha$  est un poids pondérant la contrainte additionnelle de régularisation. Notons dans le cas de la fonctionnelle (4) la contrainte de régularisation est une contrainte dure, c-à-d  $f_r(\mathbf{v}) = 0$  et les poids  $\alpha_l$  pondérant la contrainte de régularisation aux différentes échelles sont solutions du problèmes de minimisation.

### 3 Formulation probabiliste

Dans cette section nous reformulons dans un cadre probabiliste le problème de l'estimation du mouvement présenté au §2. L'objectif est de fournir, en plus du champ estimé, une cartographie des distributions bidimensionnelles de probabilités, représentant l'inhomogénéité des incertitudes suivants les directions du repère de l'étude. En effet, le champ de vitesse calculé est entâché d'incertitudes liées notamment au bruit dans l'image, aux faibles gradients de luminance et aux grands gradients de vitesse, au problème de l'ouverture et aux régularisations associées. Pour déterminer les incertitudes sur le champ de vitesse estimé, il faut calculer l'expression de la probabilité du champ de vitesse conditionnée aux images, c-à-d

$$P(\mathbf{V}|\mathbf{I}),$$

où  $\mathbf{V}$  est un "grand" vecteur contenant les vitesses  $\mathbf{v}$  en chaque point de l'image et  $\mathbf{I}$  est un vecteur composé des valeurs de niveaux de gris en chaque point de l'image.

Notons que Simoncelli *et al.* (1991) ont utilisé une approche similaire pour l'estimation du mouvement par une technique de flot optique *locale* de type Lucas & Kanade (1981).

**Estimation bayésienne** En estimation bayésienne, la résolution du problème inverse du flot optique, consiste à calculer le minimum en  $\mathbf{V}$  d'une fonction de coût définie à partir de la fonctionnelle d'énergie

$$U(\mathbf{V}|\mathbf{I}) = U_d(\mathbf{I}|\mathbf{V}) + \alpha U_r(\mathbf{V}), \quad (5)$$

où  $U_d(\mathbf{I}|\mathbf{V})$  est l'énergie d'attache aux données (où énergie externe) et  $U_r(\mathbf{V})$  est l'énergie traduisant la connaissance *a priori* sur  $\mathbf{V}$  (où énergie interne). Cette fonctionnelle d'énergie est une réécriture dans un cadre probabiliste de formulation du §2. L'approche bayésienne regarde les modèles probabilistes comme une quantification de l'état de connaissance des phénomènes réels conditionnés à l'information disponible, ici les images.

Nous choisissons une expression probabiliste du modèle d'observation, associé à l'énergie  $U_d(\mathbf{I}|\mathbf{V})$ , qui exprime l'incertitude sur le modèle de connaissance (1) sous la forme d'un bruit gaussien de moyenne  $\mu_d$  et de covariances  $\Lambda_d$ . Le nouveau terme d'attache aux données

$$\mathbf{I}_t + {}^t\mathbf{V} \cdot \mathbf{I}_s = \mathbf{n}_d, \quad (6)$$

où  $\mathbf{n}_d \sim N(\boldsymbol{\mu}_d, \Lambda_d)$ , décrit la probabilité conditionnelle  $P(\mathbf{I}|\mathbf{V})$  dont la distribution associée est proportionnelle à  $\exp -U_d(\mathbf{I}|\mathbf{V})$ .

Pour la régularisation nous considérons que l'incertitude sur la vitesse  $P(\mathbf{V})$  correspond à une distribution gaussienne de moyenne nulle et de covariances  $\Lambda_r$ . Dans ce contexte probabiliste, l'énergie *a priori* construite à partir des modèles de régularisation du §2 a une distribution proportionnelle à  $\exp -U_r(\mathbf{V})$ .

A l'aide de la formule de Bayes nous pouvons écrire l'expression de la probabilité du champ de vitesse conditionnée aux images sous la forme

$$P(\mathbf{V}|\mathbf{I}) \propto P(\mathbf{I}|\mathbf{V})P(\mathbf{V}).$$

La distribution résultante est gaussienne. La covariance  $\Lambda_v$  et la moyenne  $\boldsymbol{\mu}_v$  qui lui est associée peuvent être estimés à partir de techniques classiques. En effet, la distribution *a posteriori* s'écrit

$$P(\mathbf{V}|\mathbf{I}) \propto \exp -\frac{1}{2}(\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}_v)' \Lambda_v^{-1} (\mathbf{V} - \boldsymbol{\mu}_v) = \exp -U(\mathbf{V}|\mathbf{I})$$

et l'énergie prend la forme quadratique suivante

$$U(\mathbf{V}|\mathbf{I}) = \frac{1}{2} \mathbf{V}' \Lambda_v^{-1} \mathbf{V} - \mathbf{V}' \mathbf{b}(\mathbf{I}) + c(\mathbf{I}), \quad (7)$$

où  $\mathbf{b}(\mathbf{I})$  est un vecteur et  $c(\mathbf{I})$  un scalaire. La covariance  $\Lambda_v$  associée à la distribution de probabilité  $P(\mathbf{V}|\mathbf{I})$  se calcule directement à l'aide du Hessien de l'expression (7), c-à-d  $\Lambda_v = \nabla_{\mathbf{V}}^2 U(\mathbf{V}|\mathbf{I})$ , où  $\nabla_{\mathbf{V}}$  est le gradient par rapport à la vitesse  $\mathbf{V}$ . Par ailleurs la moyenne de la distribution *a posteriori*  $P(\mathbf{V}|\mathbf{I})$  correspond au champ de vitesse estimé  $\hat{\mathbf{V}} = \Lambda_v \mathbf{b}(\mathbf{I})$ . En tenant compte du modèle d'observation (6) ces expressions s'écrivent

$$\Lambda_v = [\mathbf{I}_s \Lambda_d^{-1} \mathbf{I}_s + \Lambda_r^{-1}]^{-1} \quad (8)$$

et

$$\hat{\mathbf{V}} = -\Lambda_v \mathbf{I}_s \Lambda_d^{-1} \mathbf{I}_t. \quad (9)$$

## 4 Résultats et discussions

Dans cette section nous évaluons les quantités obtenues à partir de la formulation bayésienne décrite au §3, c-à-d l'estimation du champ de vitesse (cf. expression (9)), et pour chaque vecteur vitesse l'estimation de la matrice de covariance correspondant à la distribution de probabilité  $P(\mathbf{V}|\mathbf{I})$  (cf. expression (8)).

La méthode d'estimation des incertitudes est évaluée sur un écoulement turbulent bidimensionnel. Ces résultats sont valables pour l'estimation tridimensionnelle d'un écoulement tridimensionnel, car la validité des modèles d'observation et de régularisation est la même. Les images analysées sont des images synthétiques de particules générées à partir d'une simulation numérique directe de turbulence bidimensionnelle. Nous nous plaçons dans un cas difficile pour lequel le déplacement moyen entre images est de l'ordre de quelques centièmes de pixels. Les deux méthodes de flot optique analysées sont des approches globales de Horn & Schunck (1981) et de Héas *et al.* (2011).

Pour la technique de Horn & Schunck (1981) le paramètre de poids  $\alpha$  a été réglé pour fournir les meilleurs résultats. Pour la technique de Héas *et al.* (2011) la régularisation a été appliquée uniquement sur les deux premières échelles de l'image, c-à-d pour des séparations de 1 à 2 pixels. Cette gamme d'échelle se situe dans la zone dissipative  $0 < \ell < \eta$ , car l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  est de l'ordre de 10 pixels. Dans ces conditions une régularisation basée sur le modèle de loi de puissance de la fonction de structure d'ordre deux  $S_2(\ell) = \beta \ell^2$  est bien adaptée. Le paramètre  $\beta$  a été calculé à partir de la simulation numérique directe, ce qui a permis de contraindre la solution avec le taux réel de transfert d'énergie inter-échelles. Notons que comme l'a proposé Héas *et al.* (2011), ce paramètre peut être estimé directement à partir des images.

La figure 1 (en haut) montre une comparaison entre les approches de Horn & Schunck (1981) et de Héas *et al.* (2011), de l'estimation de la norme de Frobenius des matrices de covariance correspondant aux distributions

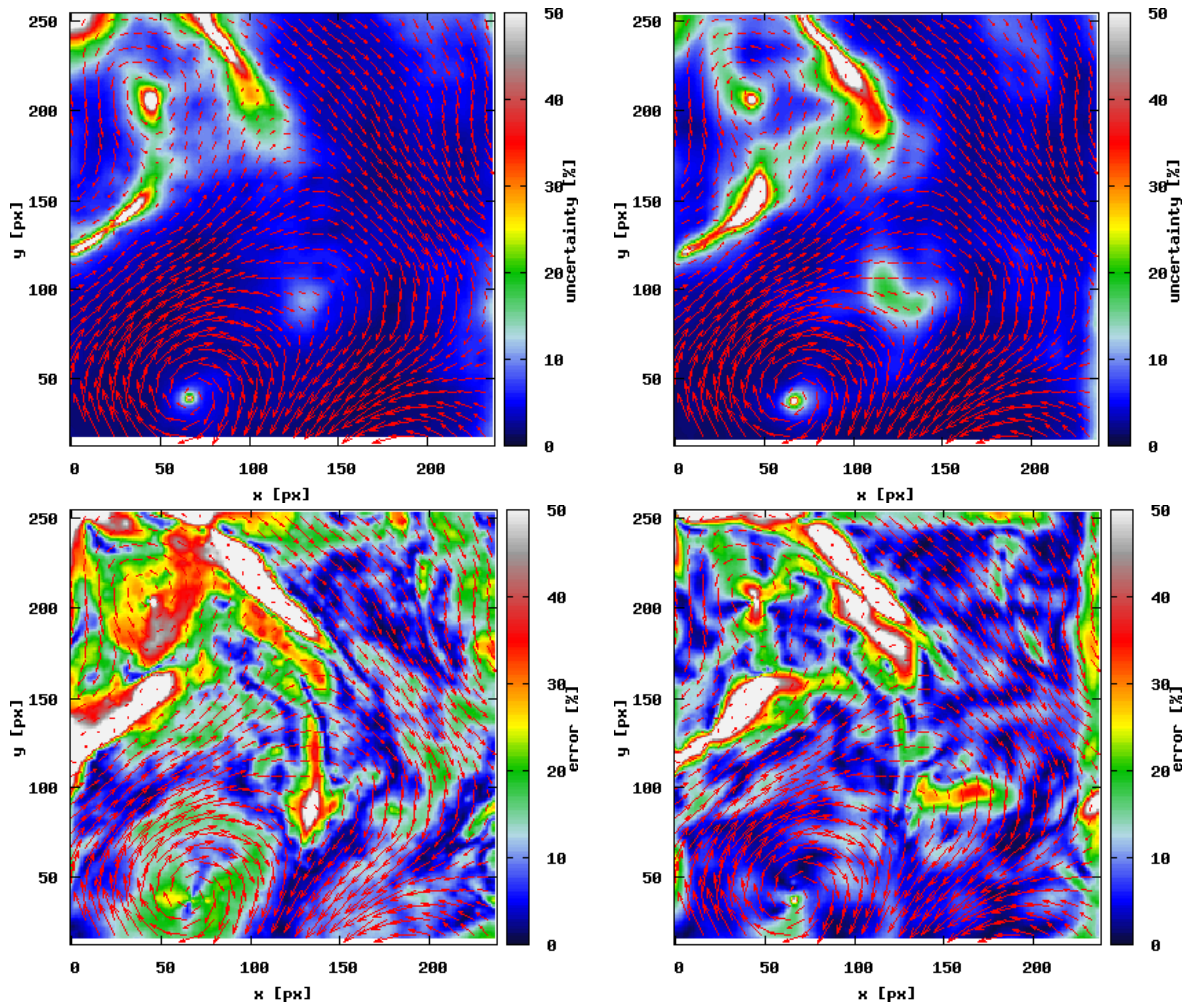


FIGURE 1 – Comparaisons entre (Haut) l'incertitude liée à la méthode et (Bas) l'erreur absolue sur le module de la vitesse, pour (Gauche) méthodes de Horn & Schunck (1981) et (Droite) méthodes de Héas *et al.* (2011).

$P(\mathbf{v}|I)$  en chaque point de l'image, c-à-d une distribution spatiale de l'incertitude liée aux deux méthodes de flot optique. Sur chaque figure le champ de vecteur estimé  $\hat{\mathbf{V}}$  a été superposé. Les résultats indiquent que l'incertitude sur l'estimation du champ de vitesse est plus importante au coeur des tourbillons et dans les zones de forts gradients. De plus les cartographies d'incertitudes semblent indiquer que pour cet écoulement, le modèle proposée par Horn & Schunck (1981) présente moins d'incertitude sur le champ de vitesse estimé dans les zones fortement cisailées et plus d'incertitude dans les zones tourbillonnaires, que la régularisation dérivée par Héas *et al.* (2011). Cependant, cette information est à relativiser si le champ estimé est fortement éloigné du champ vrai. Pour compléter l'analyse, l'erreur d'estimation de la norme du vecteur vitesse est présenté sur la figure 1 (en bas). Cette information montre clairement que l'approche de Horn & Schunck (1981) fournit de moins bonnes estimations sur une grande partie des régions de l'écoulement. De plus comme l'indique le couple incertitude faible et erreur importante au niveau du tourbillon en bas à gauche de l'écoulement, les estimations de Horn & Schunck (1981) sont entachées d'une erreur systématique. Le modèle proposé par Héas *et al.* (2011) est plus performant pour les écoulements turbulents. Enfin la corrélation entre forte incertitude et grande erreur d'estimation est également un gage de bonne adéquation du modèle de régularisation au phénomène physique étudié.

## 5 Conclusions

Une nouvelle méthode d'estimation des incertitudes de mesures PIV est proposée. L'approche met en œuvre une formulation probabiliste du flot optique dans un cadre bayésien. La technique estime des cartographies des incertitudes de mesure de la vitesse et permet d'analyser la pertinence des modèles de connaissance mis en jeux dans l'estimation du mouvement à partir d'images. On montre en particulier que la régularisation de Héas *et al.* (2011) est plus adaptée aux écoulements turbulents que celle proposée par Horn & Schunck (1981). Le formalisme bayésien permet non seulement d'améliorer l'estimation des vitesses, mais également d'affiner l'estimation des incertitudes par l'introduction dans les modèles de connaissance d'une modélisation probabiliste des différentes sources d'incertitudes.

## Références

- Corpetti, T., Heitz, D., Arroyo, G., Mémin, E. & Santa Cruz, A. 2006 Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme. *Exp. Fluids* **40** (1), 80–97.
- Dérian, P., Héas, P., Herzet, C. & Mémin, E. 2011 Wavelets to reconstruct turbulence multifractals from experimental image sequences. In *7th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena, TSFP-7*. Ottawa, Canada.
- Frisch, U. 1995 *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- Héas, P., Mémin, E., Heitz, D. & Mininni, P. 2011 Power laws and inverse motion modeling : application to turbulence measurements from satellite images. *Tellus-A* .
- Heitz, D., Mémin, E. & Schnörr, C. 2010 Variational fluid flow measurements from image sequences : synopsis and perspectives. *Exp. Fluids* **48** (3), 369–393.
- Horn, B. & Schunck, B. 1981 Determining optical flow. *Artif. Intell.* **17**, 185–203.
- JCGM 100 :2008 Evaluation of measurement data - guide to the expression of uncertainty in measurement.
- JCGM 101 :2008 Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the Guide to the expression of Uncertainty in Measurement-propagation of distribution using a Monte Carlo method.
- Liu, T. & Shen, L. 2008 Fluid flow and optical flow. *J. Fluid Mech.* **614**, 253–291.
- Lucas, B. & Kanade, T. 1981 An iterative image registration technique with an application to stereovision. In *Int. Joint Conf. on Artificial Intel. (IJCAI)*, pp. 674–679.
- Simoncelli, E., Adelson, E. & Heeger, D. 1991 Probability distributions of optical flow,. In *Proc. Conf Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 310–315. Maui, HI.