Dynamique du nombre d'or

Pierre Arnoux et Anne Siegel

Pierre Arnoux, IML UMR-Cnrs 6206, Campus de Luminy case 907, 13288 Marseille Cedex 9, France, arnoux@iml.univ-mrs.fr.
Anne Siegel, IRISA-CNRS, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France, anne.siegel@irisa.fr.

Introduction

L'objectif de ce cours est d'aborder différentes notions fondamentales relatives aux systèmes dynamiques à partir d'un fil directeur qui sera le nombre d'or.

Nous avons tenté de nous astreindre à énoncer des résultats et des démonstrations qui restent pour la plupart au niveau d'élèves de lycée ou de premier cycle universitaire. Un de nos but est ainsi de permettre l'illustration en lycée des notions telles que le chaos ou l'entropie, via des problèmes et exercices qui peuvent contenir une part ludique.

En particulier, on conseille de lire d'abord ce cours d'un trait, du nombre d'or jusqu'au dragon de Heigway, puis de revenir sur certaines parties pour en extraire des énoncés de problèmes sur un thème particulier.

Des présentations pdf ont été développées en complément de chaque partie de ce cours. Ces présentations suivent le déroulement du cours, et en donne une vision allégée et imagée. En particulier, certaines démonstrations sont épurées ou abordées d'un point de vue différent du cours. On ne peut qu'encourager le lecteur à se référer aux deux sources (visuelle et textuelle) pour avoir une vision générale de ce travail.

Ce cours se divise en quatre parties de taille égale.

Dans la première partie, on définit le nombre d'or à la manière pythagoricienne, c'est-à-dire comme rapport de la diagonale par le côté d'un pentagone. On retrouve géométriquement les équations algébriques vérifiées par le nombre d'or. On introduit ensuite la suite de Fibonacci, et on s'intéresse à son comportement assymptotique. On définit alors la notion de développement d'entiers en base de Fibonacci, qui sera reprise dans les chapîtres suivants.Les annexes de cette partie sont assez conséquentes, et rassemblent un certain nombre d'exercices géométriques relatifs au nombre d'or, ainsi qu'à la place du pentagone dans les polyèdres réguliers de l'espace.

La seconde partie est consacrée à la multiplication par le nombre d'or. On introduit la notion de développement de réels en base du nombre d'or, et on fait le lien entre les développements et la multiplication par le nombre d'or. On montre ensuite en quoi la multiplication par le nombre d'or est une application chaotique, en particulier, en calculant explicitement son entropie. On montrera enfin que, au sein de ce chaos réside une régularité qui est de nature statistique, liée à la fréquence de 1 dans les développements en base du nombre d'or.

La troisième partie est consacrée à l'addition du nombre d'or. On explique pourquoi cette application n'est absolument pas chaotique, en déterminant son entropie. On montre à l'inverse que cette application est fractale dans la mesure où elle se contient elle-même, en un sens qui est précisé dans le texte.

Enfin, dans la dernière partie, on explique comment l'addition du nombre d'or et la multiplication se retrouvent dans une unique représentation géométrique. On discute ensuite de certaines généralisations de ces résultats à d'autres nombres, reliés à des structures fractales dont la plus aboutie sera le dragon de Heighway.

Chapitre 1

Histoire: Pythagore et Fibonacci

1.1 Préhistoire

Commençons ce cours par un peu de mythologie. Rien de ce qu'on va raconter dans cette section n'est vraiment attesté historiquement, seule l'imagination permet de le reconstituer...

1.1.1 Magie du pentagramme

Le pentagone régulier, qui se retrouve un peu partout dans la nature, des fleurs aux fruits et aux étoiles de mer (photo gracieusement fournie par www.marseille-sympa.com), se présente naturellement sous deux formes: le **pentagone usuel**, et le **pentagone étoilé**, formé par les cinq diagonales du pentagone usuel.

Réunis, le pentagone usuel et le pentagone étoilé forment le pentagramme, aux connotations ésotériques; on sait en particulier qu'il était il y a 25 siècles le symbole de la secte des pythagoriciens.

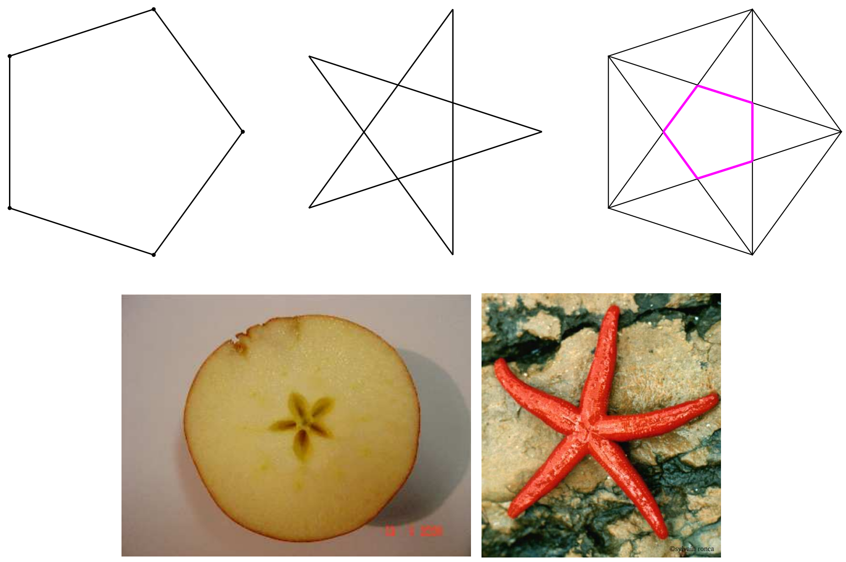


FIG. 1.1 – *Les deux pentagones et le pentagramme; une illustration dans la nature*

1.1.2 Un nombre naturel associé au pentagone

Au sein du pentagone, on note qu'un nombre remarquable apparaît, à savoir le rapport entre la diagonale et le côté du pentagone; il est remarquable dans la mesure où c'est l'un des nombres réels les plus simples et les plus naturels que l'on puisse trouver.

$$\varphi = \frac{\text{Diagonale}}{\text{Côté}}$$

Pour les premiers penseurs grecs, un tel nombre ne pouvait probablement être qu'une fraction, et il suffisait pour la trouver de chercher la mesure commune entre le côté et la diagonale du pentagone (c'est-à-dire un petit segment de longueur telle que le côté et la diagonale soient tous deux des multiples entiers de ce segment).

Irrationnalité Mais là se présente une difficulté: en effet, au centre d'un pentagone étoilé, se trouve un pentagone plus petit (voir aussi le dessins de droite Figure 1), et un peu de calcul (voir annexe) montre que le côté C et la diagonale D du pentagone d'origine sont des combinaisons linéaires simples du côté c et de la diagonale d du petit pentagone; plus précisément, on a:

$$C = c + d \qquad D = 2d + c$$

formule qui s'inverse en

$$d = D - C \qquad c = 2C - D$$

Mais une mesure commune à D et C serait donc une mesure commune à d et c; en itérant le procédé, on voit qu'une telle mesure devrait être arbitrairement petite, et qu'elle ne peut donc pas exister ... Le côté et la diagonale du pentagone régulier sont donc incommensurables, ce qui ne veut pas dire qu'ils sont très grands, mais que, quelle que soit l'unité de mesure choisie, ils ne peuvent jamais s'exprimer simultanément en nombre entiers.

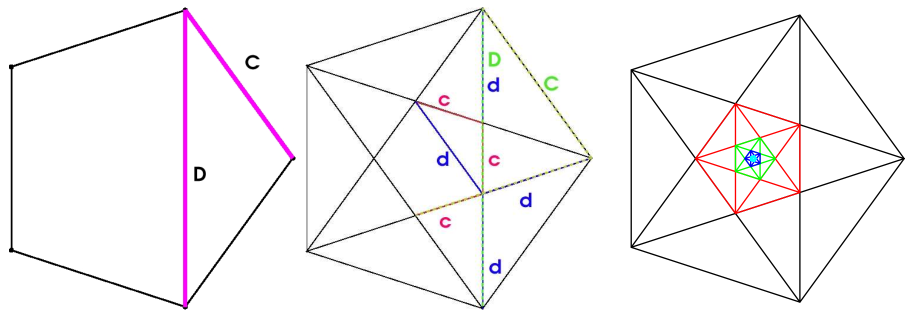


FIG. 1.2 – *Pentagones emboîtés*

La preuve qui précède montre que le rapport ϕ entre la diagonale et le côté d'un pentagone ne peut être une fraction.

Théorème 1.1 *Le nombre d'or ϕ, rapport de la diagonale au côté du pentagone régulier, est un nombre irrationnel.*

Il s'agit probablement du plus ancien nombre irrationnel connu: la preuve classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est de nature arithmétique, et probablement plus récente (on peut aussi donner une preuve géométrique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, mais elle est plus délicate que pour le nombre d'or).

De même, un calcularithmétique simple permet de prouver l'irrationalité du nombre d'or. Cependant, un tel calcul était plus ou moins inaccessible au temps de l'antiquité.

$$
\begin{aligned}
\phi = \frac{D}{C} = \frac{d}{c} = \frac{p}{q} \quad & \Longrightarrow \quad (c+d)p - (c+2d)q = 0 \\
& \Longrightarrow \quad cp - dq = 0 \\
& \Longrightarrow \quad dp - cq - dq = 0 \\
& \Longrightarrow \quad \frac{d}{c} = \frac{q}{p-q} = \frac{p}{q} \\
& \Longrightarrow \quad q^2 = p(p-q) \\
& \Longrightarrow \quad p \text{ divise } q.
\end{aligned}
$$

Série géométrique Il y a une forme encore plus simple de cette contruction: on peut construire, comme on le voit sur la Figure 1.3, pour un pentagone de côté $C_0 = 1$ et de diagonale $D_0 = \phi$, un pentagone plus petit, de diagonale $D_1 = C_0 = 1$; on montre alors que le côté de ce pentagone est de longueur $C_1 = D_0 - C_0 = \frac{D_1}{\phi} = \frac{1}{\phi}$. On peut itérer la construction et obtenir une infinité de pentagones de plus en plus petit, de côté $C_n = \frac{C_0}{\phi^n} = \frac{1}{\phi^n}$.

On peut lire sur ce dessin la somme d'une série géométrique (voir l'annexe pour le détail de la preuve):

Proposition 1.2

$$1 + \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^n} = \phi^2.$$

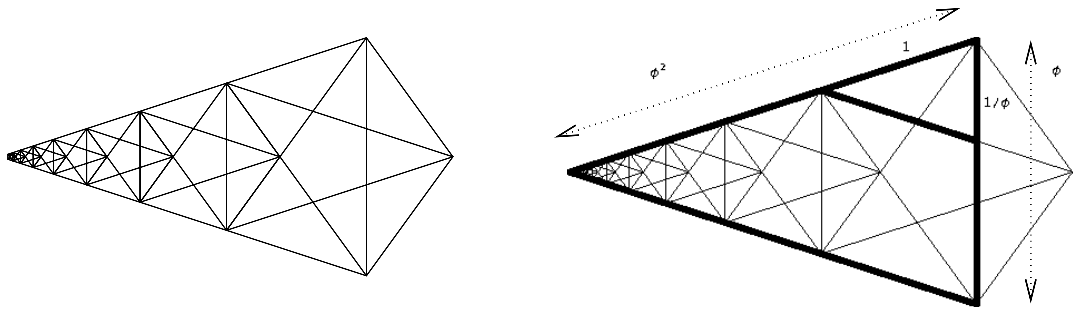


FIG. 1.3 – *Pentagones itérés*

En remarquant comme à la Figure 1.4 que, si l'on place dans un coin d'un pentagone régulier de côté 1 une suite de pentagones réguliers décroissants de côté $1/\phi^{2n}$, ces pentagones découpent une diagonale aboutissant en ce sommet en segments de longueur $1/\phi^{2n}$, on obtient la somme d'une autre série géométrique qui nous servira plus tard:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^{2n}} = \phi.$$

Ou encore, en divisant par ϕ:

Proposition 1.3

$$\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^{2n+1}} = 1.$$

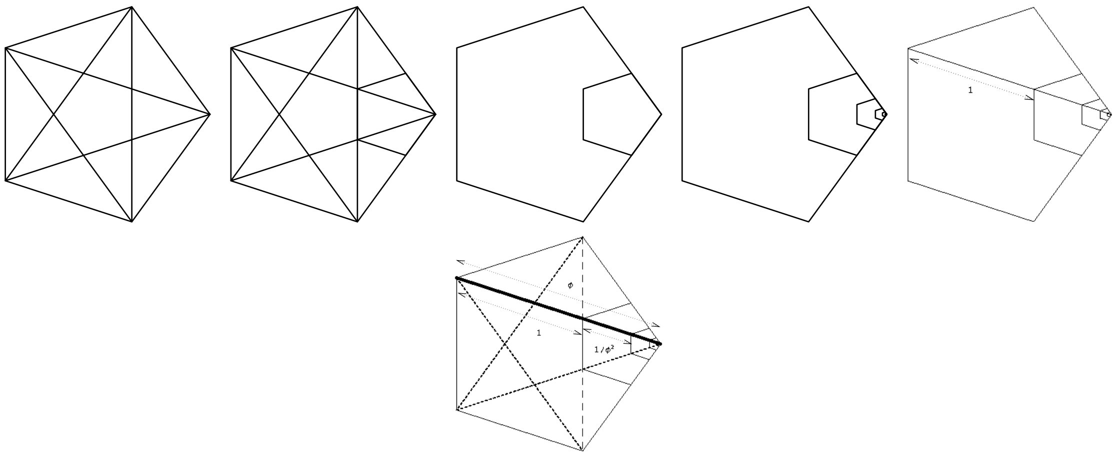


FIG. 1.4 – *Une autre série géométrique*

Equation algébrique Dans un langage algébrique moderne, toutes ces constatations se ramènent à une propriété algébrique très simple: en reprenant la preuve faite précédemment sur la suite de pentagone emboîtés de côté $C_n = C_0/\phi^n$ (figure 1.3), on voit que $C_0 = C_1 + C_2$, et que, en écrivant tout comme multiple de C_2, on obtient $\phi^2 = \phi + 1$.

Théorème 1.4 *Le nombre d'or ϕ, rapport de la diagonale au côté du pentagone régulier, est l'unique racine positive du polynome $X^2 - X - 1$.*

D'où l'on déduit bien sûr, en langage moderne:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ldots$$

On déduit facilement de cette propriété la somme des séries géométriques précédentes par un calcul algébrique.

Itération de racines Du théorème précédent, on déduit, puisque ϕ est positif, que $\phi = \sqrt{1+\phi}$, formule que l'on peut itérer: $\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}$, et ainsi de suite, ce qui donne envie d'écrire la formule classique:

Proposition 1.5

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$$

Cette formule n'a bien sûr pas de sens en tant que telle, mais il n'est pas difficile de lui en donner un; étant donné un réel positif u_0 quelconque, on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$; comme la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est strictement contractante sur $[0,+\infty[$, cette suite converge vers une limite indépendante du point de départ u_0; cette limite est le sens qu'il faut donner au terme de droite $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$, et elle est bien sûr égale à ϕ.

Développement en fractions continues On peut également écrire $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$, et itérer. On trouve une autre formule célèbre:

Proposition 1.6

$$\phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}$$

On montre que tout nombre réel x peut s'écrire sous la forme $x = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots}}$, où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et a_n est un entier strictement positif pour $n > 0$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant finie si x est rationnel et infinie sinon; c'est ce qu'on appelle un développement de x en fraction continue. La proposition 1.6 nous dit que le développement en fraction continue de ϕ est le plus simple possible. On laisse au lecteur le soin d'écrire cette égalité comme une limite, et de calculer les premiers termes de la suite correspondante en ne gardant que les n premiers termes de la fraction. Les fractions obtenues sont appelées les convergents de la fraction continue; nous les retrouverons bientôt.

1.1.3 Remarques

On peut aller bien plus loin avec le pentagone: il apparaît partout dans le dodécaèdre, l'un des cinq solides platoniciens, qui contient 5 cubes dont les côtés sont des diagonales des faces du dodécaèdre, et dans le solide dual, l'icosaèdre; il existe un polyèdre semi-régulier intermédiaire bien connu, qui admet 32 faces, 12 pentagones et 20 hexagones, le ballon de foot. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction; voyez l'annexe pour quelques constructions géométriques classiques.

On peut aussi remarquer que l'on peut écrire $\phi^2 = \phi + 1$, donc $\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$, et qu'on peut donc écrire toute puissance de ϕ comme combinaison linéaire de 1 et ϕ (ce qui se voit déjà sur le pentagone en essayant d'exprimer le diagonale du pentagone initial comme combinaison du côté et de la diagonale du n-ième petit pentagone).

Exercice 1.1 *Trouver les coefficients b_n et c_n tels que $\phi^n = a_n + b_n\phi$.*

1.2 Protohistoire

Sautons une quinzaine de siècles, et retrouvons nous à la fin du moyen-âge.

Leonardo de Pise, fils de Guglielmo Bonacci (d'où le nom sous lequel il est mieux connu: filius Bonacci, en abrégé Fibonacci), né en 1170, part avec son père en 1192 faire du commerce à Bougie, en Algérie. Pendant les années suivantes, il voyage autour de la méditerranée, et apprend les nouvelles techniques venues d'Inde et mises en forme à Bagdad, en particulier, entre 800 et 830, par le mathématicien ouzbek Al-Khwarizmi. Il rentre à Pise, où il publie plusieurs ouvrages, dont le célèbre livre de l'abaque. Ce sont des techniques que nous apprenons maintenant en CM2; on peut les considérer, à l'époque, comme l'équivalent d'un DEA de mathématiques financières. Il meurt aux environs de 1240.

1.2.1 Suite de Fibonacci

Il est plus célèbre chez les mathématiciens pour l'invention de la suite qui porte son nom, initialement posée comme un problème amusant de croissance démographique:

- an 0: un couple de lapins nait;
- an 1: le couple est déposé sur une île et grandit;
- an 2: le couple engendre un couple;
- an 3: le premier couple engendre encore un couple; le second grandit;
- an 4: les deux couples engendrent chacun un nouveau couple; le couple de l'an 3 grandit;
- les lapins sont immortels.

On note F_n le nombre de couples de lapins présents sur l'île durant l'année n, après les naissances de cette année. Le nombre de couples de lapins de l'année $n+2$ est donc égal au nombre de couple de lapins de l'année $n+1$, augmenté du nombre de couple de lapins engendrés dans l'année, qui est égal au nombre de couples adultes vieux d'au moins deux ans, c'est-à-dire ceux qui sont nés en l'année n ou avant. De façon plus formelle:

Définition 1.7 *On appelle suite de Fibonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, si $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.*

De même que le nombre d'or, les nombres de Fibonacci se retrouvent souvent dans la nature, par exemple dans les pommes de pin, les ananas, les tournesols; en général, la plupart des végétaux composés présentent des spirales qui sont organisées suivant les nombres de Fibonacci. En particulier, dans la figure suivante, on peut compter les spirales allant vers la gauche au sein du tournesol, et les spirales allant vers la droite. On en trouvera respectivement 34 et 55.

De même, la peau d'ananas présentée à gauche montre 8, 13 et 21 parallèles dans différentes directions : sur un ananas non découpé, ceci revient à dire que, partant d'une cellule de l'écorce de l'ananas, si on choisit son plus proche voisin dans une direction donnée, on fera 8, 13 ou 21 tours (en fonction de la direction choisie) avant de revenir à la cellule initiale.

En particulier, les fleurs composées (marguerite, paquerette, chrysanthème...), quand elles sont entières, ont toujours le même nombre de pétales, qui dépent de l'espèce, et qui est un nombre de Fibonacci, souvent 13 ou 21; quand on effeuille la marguerite, on peut donc savoir à l'avance, suivant l'espèce, où l'on va aboutir (à condition que la fleur soit intacte...).

On notera qu'on ne connaît pas la raison exacte de ce phénomène. En fait, plusieurs explications chimiques ou biologiques sont en concurrence à ce sujet.

PHOTO MARGUERITE 

FIG. 1.5 – *Quelques nombres de Fibonacci apparaissant dans la nature*

w

1.2.2 Propriétés algébriques

On a déjà rencontré les termes de la suite de Fibonacci dans la section précédente: ce sont eux qui apparaissent quand on essaie d'exprimer le côté d'un pentagone en terme de côté et de diagonale d'un pentagone plus petit (exercice 1.1). Ce n'est pas étonnant, puisque la même formule de récurrence apparaît.

Les nombres de Fibonacci satisfont de nombreuses formules, qui se prouvent en général facilement par récurrence; citons simplement la formule:

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$$

qui prouve que deux nombres de Fibonacci consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Comment grandissent les nombres de Fibonacci? On cherche le rapport entre deux termes consécutifs de la suite.

Proposition 1.8 *La suite de terme général $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ tend vers ϕ quand n tend vers l'infini.*

Preuve: Si l'on pose $r_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, on vérifie que $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$. C'est alors un exercice classique, en utilisant le fait que l'application $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ préserve l'intervalle $[\frac{3}{2}, 2]$ et est contractante sur cet intervalle, de prouver que cette suite converge vers une limite, qui est le point fixe de la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. ■

Les nombres $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ sont les fractions continues finies évoquées à la section précédente (on peut montrer que ce sont les meilleures approximations de ϕ par des nombres rationnels).

1.2.3 Calcul explicite

Il est aussi utile de disposer d'une formule explicite (c'est-à-dire ne dépendant que de n) pour chaque nombre de Fibonacci F_n. Nous allons la trouver en généralisant un peu le problème: considérons les suites "du type de Fibonacci", c'est-à-dire les suites u qui vérifient $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, quel que soit leur point de départ.

On voit tout de suite que, la contrainte étant linéaire, la somme de deux suites du type de Fibonacci est encore une telle suite. Comme une suite du type de Fibonacci est complètement déterminée par ses deux premières valeurs, il suffira de trouver deux suites non proportionnelles pour pouvoir toutes les déterminer. En effet, à partir du moment où on disposera de deux suites non poportionnelles g_n et h_n, on pourra écrire de manière unique les deux premiers termes u_0 et u_1 d'une suite du type de Fibonacci quelconque sous la forme $u_0 = Ag_0 + Bh_0$ et $u_1 = Ag_1 + Bh_1$. La suite u_n est alors entièrement déterminée par la formule $u_n = Ag_n + Bh_n$, où A et B sont solutions du système précédent.

Cherchons s'il existe des suites du type de Fibonacci qui sont géométriques de raison r, $u_n = r^n$. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait $r^{n+2} = r^n + r^{n+1}$, soit $r^2 = 1 + r$. Il y a donc deux telles suites, l'une de raison ϕ, l'autre de raison $\overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi} \approx -0,618$, le nombre conjugué de ϕ, c'est-à-dire l'autre racine de $X^2 - X - 1 = 0$.

Toute suite de type Fibonacci peut donc s'écrire sous la forme $A\phi^n + B\overline{\phi}^n$. Le calcul de A et B pour la suite de Fibonacci donne:

Théorème 1.9 $F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^n}{\sqrt{5}}$, *où* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ce théorème nous renseigne de façon bien plus précise sur le comportement asymptotique de la suite de Fibonacci. Remarquons que $\overline{\phi}^n$ tend exponentiellement vite vers 0, avec un signe qui alterne, et donc, comme on le vérifie facilement à la calculatrice, $\frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$ est une très bonne approximation de F_n, par défaut pour n pair et par excès pour n impair.

On notera en particulier que ce calcul est élémentaire et ne nécessite aucune notion d'algèbre linéaire si ce n'est la résolution de systèmes linéaires.

1.3 Un exercice d'algèbre linéaire

Une manière plus contemporaine de voir ce qui précède s'exprime en termes d'algèbre linéaire. Les résultat qui suivent ne sont ainsi pas abordables en lycée. Cependant, le tracé des points figure 1.7 peuvent être une source de problèmes illustrant la notion d'hyperbole et de convergence de suites.

Le raisonnement qui précède peut à bon droit laisser le lecteur insatisfait, avec l'impression d'un tour de prestidigitation: pourquoi chercher une suite particulière sous la forme d'une suite géométrique, et non pas d'un polynôme, par exemple? que se passe-t-il si l'on change la condition de récurrence, par exemple en $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$?

Quelques remarques peuvent éclairer cette démarche; tout d'abord, il s'agit d'un problème *linéaire*; les physiciens diraient qu'il obéit au *principe de superposition*: la somme de deux solutions est encore une solution.

Ensuite, on aimerait bien que le passage au terme suivant soit représenté par une application linéaire; mais le calcul du terme u_{n+2} fait intervenir les deux termes précédents. La solution est de considérer, non pas le point u_n, mais le vecteur $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$; on vérifie immédiatement que l'on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne immédiatement

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du terme général de la suite revient donc en fait à calculer les puissance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est là un problème tout à fait classique; on sait bien qu'il faut commencer, si possible, par diagonaliser la matrice, donc en chercher les valeurs propres et les vecteurs propres.

On vérifie que le polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$, les deux valeurs propres sont donc ϕ et $\overline{\phi}$, et les vecteurs propres, $\begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \overline{\phi} \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondent aux suites à croissance géométriques que l'on vient de voir; la matrice est diagonalisable dans cette base, ce qui permet le calcul explicite de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$. La matrice de changement de base qui exprime les deux vecteurs propres vus ci-dessus est $P = \begin{pmatrix} \phi & \overline{\phi} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; son inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-\overline{\phi}}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{\phi}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. On a évidemment: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \overline{\phi} \end{pmatrix} P^{-1}$, ce qui permet de calculer les puissance de la matrice:

Proposition 1.10

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n = P\begin{pmatrix}\phi^n & 0\\ 0 & \overline{\phi}^n\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^{n}}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^{n}}{\sqrt{5}}\\ \frac{\phi^{n}}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^{n}}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^{n-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^{n-1}}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

On retrouve bien le théorème ci-dessus, car on montre par récurrence que l'on a l'égalité: $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$.

Ce changement de base permet de comprendre très bien l'évolution d'une suite: considérons une suite du type de Fibonacci, dont les deux premiers termes sont $\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix}$. Pour obtenir les termes $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$, on vient de voir qu'il suffit de faire le produit par la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n$. Considérons cette suite comme un élément d'un espace vectoriel, et plaçons nous dans la base des vecteurs propres; soient $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ les cordonnées dans la nouvelle base (ces coordonnées se calculent à l'aide de la matrice P^{-1}). Si l'on appelle $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ les coordonnées des images successives du point $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$, elles se calculent très facilement, puisque dans la nouvelle base la matrice est diagonale: on a $x_n = \phi^n x_0$, $y_n = \overline{\phi}^n y_0$.

En particulier, comme $\phi\overline{\phi} = -1$, on voit que le produit $x_n y_n$ est constant en valeur absolue; plus précisément, pour n pair, le point $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ se trouve sur l'hyperbole $xy = x_0 y_0$, et pour n impair, il se trouve sur l'hyperbole $xy = -x_0 y_0$. On laisse au lecteur le soin de donner l'équation de ces hyperboles dans la base initiale; la situation est représentée Figure 1.6.

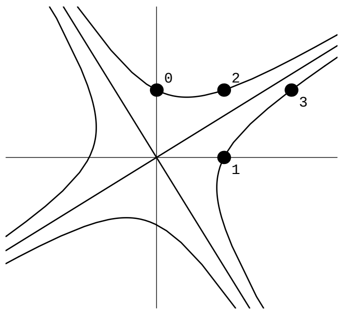


FIG. 1.6 – *Les hyperboles de l'application de Fibonacci*

On peut alors expliciter complètement la dynamique de la suite de Fibonacci: si l'on démarre avec un vecteur $\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix}$ sur l'espace propre correspondant à ϕ, on y reste, en partant vers l'infini exponentiellement vite (multiplication par ϕ à chaque étape). Si on démarre sur l'autre espace propre, on tend très vite vers 0, en alternant autour de l'origine (car la valeur propre est négative). En général, on tend exponentiellement vite vers la droite associée à ϕ, en alternant entre deux branches d'hyperboles de part et d'autre de cette droite.

On trouvera une illustration de ce comportement Figure 1.7. En effet, sur chaque figure sont représentées les trajectoires du point 0 sous l'action de la matrice M. Si (a, b) désignent les coor-

données du point noté 0 sur l'une des figures, les points notés i ont pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
On constatera sur la figure de gauche que les points alternent en se placant sur des branches hyperboliques et se placent finalement de plus en plus près d'une droite située dans le cadrant positif du plan. Cette droite est en fait la droite associée à ϕ, dirigée par $\begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par contre, sur la figure de droite, les points se rapprochent de la même droite, mais sur sa partie située dans le cadran négatif du plan. Les points suivent alors la branche négative des hyperboles suivies sur l'exemple de gauche. La différence entre ces deux comportements trouve son origine dans le fait que le point 0, sur chaque figure, est situé de part et d'autre de la direction associée à $\overline{\phi}$, ce qui va faire changer totalement le comportement à la limite.

Remarquons que, pour presque tout point de départ, la suite tend assez vite à ressembler à une suite géométrique de raison ϕ; cela explique l'instabilité numérique que l'on constate dans l'un des problèmes donnés en annexe.

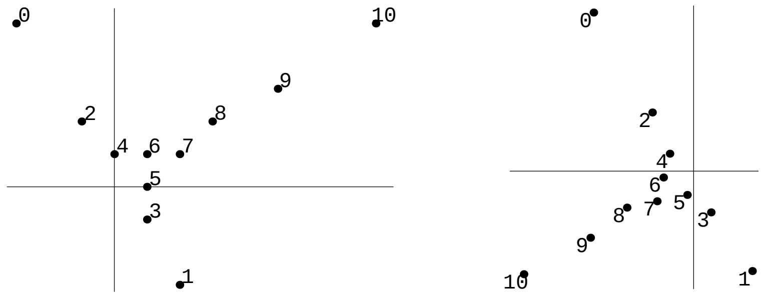


FIG. 1.7 – *La dynamique de l'application de Fibonacci*

1.4 Quelques utilisations originales de la suite de Fibonacci

1.4.1 Le développement de Zeckendorff

On sait que l'on peut écrire les entiers en base 10, comme cela se fait dans la plupart des civilisations, ou en base 2, comme on le fait en informatique. Par exemple, 8529 se développe en base 10 sous la forme

$$8529 = 8 * 10^3 + 5 * 10^2 + 2 * 10 + 8 * 1.$$

On calcule son développement en base 2 à partir de la suite des puissances de 2, c'est-à-dire:

$$\text{Puissances de 2 } : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384.$$

On remarque alors que $2^{13} = 8192 \leq 8529 < 2^{14}$. De plus $8529 - 2^{13} = 8529 - 8192 = 337$ est compris entre $256 = 2^8$ et 2^9. Ensuite, $337 - 256 = 81$ est compris entre $64 = 2^6$ et 2^7. La suite du calcul donne $81 - 64 = 17 = 16 + 1$. Finalement, le développement en base 2 de 8529 est

$$8529 = 2^{13} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^0 = 10000101010001_2.$$

On peut essayer de jouer au même jeu avec la suite de Fibonacci: écrire un entier comme somme de nombres de Fibonacci. Remarquons qu'on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de nombres de Fibonacci consécutifs dans la somme, sinon on pourrait la simplifier en utilisant la relation de récurrence.

Le calcul du développement de 8529 en base de Fibonacci se fait de manière identique à la base 2. La suite de Fibonacci commence comme suit:

Suite de Fibonacci $: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946.$

Il suffit alors de trouver les nombres de Fibonacci qui encadrent 8529, soit $6765 = F_{20} < 8529 < F_{21} = 10946$. De même, $1597 = F_{17} < 1764 = 8529 - 6765 < F_{18}$. La suite du calcul donne $144 = F_{12} < 167 = 1764 - 1597 < F_{13}$. Puis $21 = F_8 < 23 = 167 - 144 < F_9$. Enfin $23 - 21 = 2 = F_3$. Finalement, le développement de 8529 est

$$8529 = F_{20} + F_{17} + F_{12} + F_8 + F_3.$$

De manière générale, on montre que le développement en base de Fibonacci existe est est unique sous la condition *deux 1 non consécutifs.*

Théorème 1.11 *Tout entier $k \in \mathbb{N}$ peut s'écrire de façon unique $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, où $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite finie de 0 et de 1 qui ne contient pas deux 1 consécutifs.*

Preuve: La suite de Fibonacci étant strictement croissante à partir du rang 2, elle tend vers l'infini, puisqu'elle est entière. La démonstration de l'existence du développement peut donc se fait par récurrence sur N, en montrant que tout entier $k \leq F_N$ vérifie le théorème. La propriété est vraie pour $N = 2$ puisque $F_2 = 1$. Si cette propriété est vérifiée à l'ordre $N - 1$, posons $F_{N-1} \leq k < F_N$. On a alors $k - F_{N-1} < F_{N-2}$ (sinon $k \geq F_N$). Par récurrence, on sait que $k - F_{N-1} = \sum_{n=2}^{N-3} \epsilon_n F_n$ où il n'y a pas deux 1 de suite (noter que le terme en $N - 2$ est nul dans la mesure où $k - F_N < F_{N-2}$). Ainsi, k peut s'écrire comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.

L'unicité est un peu plus délicate; on va commencer par montrer un lemme:

Lemme 1.12 *Soit $(\epsilon_n)_{n=2\ldots N-1}$ une suite finie de 0 et de 1 qui ne contient pas deux 1 de suite. Alors:*

$$\sum_{n=2}^{N-1} \epsilon_n F_n < F_N.$$

Preuve: Ce lemme se démontre par récurrence sur N; la vérification est immédiate pour $N = 3, 4$, puisque $F_2 = 1 < F_3 = 2 < F_4 = 3$.

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $N \geq 4$, et considérons une suite $(\epsilon_n)_{n=2\ldots N}$ ayant la propriété voulue.

Si $\epsilon_N = 0$, alors $\sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n = \sum_{n=2}^{N-1} \epsilon_n F_n < F_N$, et on a une majoration meilleure que celle demandée.

Si $\epsilon_N = 1$, alors $\epsilon_{N-1} = 0$, puiqu'il n'y a pas deux 1 de suite, et donc $\sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n = F_N + \sum_{n=2}^{N-2} \epsilon_n F_n < F_N + F_{N-1} = F_{N+1}$, ce qui est la propriété demandée. ■

On retrouvera dans la suite des lemmes analogues.

Il est alors facile de terminer la preuve: si un nombre entier k peut s'écrire de deux façons différentes $k = \sum_{n=2}^{N_1} \epsilon_n F_n = \sum_{n=2}^{N_2} \alpha_n F_n$, on considère le plus grand indice N pour lequel les deux développements sont distincts. On peut supposer que $\epsilon_N = 1$ et $\alpha_N = 0$. On a donc $\sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n = \sum_{n=2}^{N-1} \alpha_n F_n$, donc $\sum_{n=2}^{N-1} \alpha_n F_n \geq F_N$, ce qui contredit le lemme précédent. ■

Définition 1.13 *Le développement en base de Fibonacci est appelé le développement de Zeckendorff. Si $k = \sum_{n=2}^{N} \epsilon_n F_n$, on notera aussi $k = (\epsilon_N \epsilon_{N-1} \ldots \epsilon_2)_F$.*

Pour donner quelques exemples, les premiers entiers s'écrivent $1 = 1_F$, $2 = 10_F$, $3 = 100_F$, $4 = 101_F$, $5 = 1000_F$, $6 = 1001_F$, $7 = 1010_F$, $8 = 10000_F$, etc. On vient aussi de montrer que

$$8529 = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0)_F.$$

Comme on le voit, l'expression d'un nombre dans la base de Fibonacci n'est pas très économique: il y faut encore plus de chiffres qu'en binaire.

Voyager aux US Le rapport du miles au Km, soit environ 1,608 , est très proche du nombre d'or; mais nous avons vu que le rapport de deux nombre de Fibonacci consécutif tend rapidement vers ϕ; donc, pour multiplier un entier (de façon approximative) par ϕ, il suffit de décaler d'un cran son développpement de Zeckendorff en ajoutant un zéro au bout (de même qu'un décalage en base 10 multiplie par 10, cette fois de façon exacte); d'ou une méthode simple pour convertir des limitations de vitesse en miles à des limitations en Km: calculer le développement de Zeckendorff du nombre à convertir, puis décaler d'un cran. On peut vérifier que, pour des vitesses entre 1 et 100, on se trompe au plus d'une unité.

Cette méthode n'est pas aussi compliqué qu'il n'y paraît, car les nombres de Fibonacci sont proches des limitations de vitesses standard (34, 55, 89, 144). Par exemple, une vitesse de 55 miles par heure (limitation de vitesse la plus courant aux Etats-Unis) correspond à 89 Km par heure...

Un petit poème Concluons cette partie sur un exemple littéraire, tiré du volume 1 de la bibliothèque oulipienne (OUvroir de la LIttérature POtentielle, La bibliothèque oulipienne, volume 1, éditions Ramsay, 1987). Il s'agit d'une famille de 20 poèmes numérotés (plutôt hermétiques...) où chaque poème est éclairci par tous les poèmes dont les numéros figurent dans son développement de Zeckendorff; le premier poème de la famille est une ode à Fibonacci.

L'explication préalable, ou la raison des rimes, par Paul Braffort

C'est mon devoir, c'est mon défi,
tel Jarry, Cyrano bouffi,

de chercher des poux à Rimbaud,
et sur les zizis des bobos.

Qu'il neigeât ou bien qu'il fît beau
A Lhassa Emma Sophie Bo-

vary veuve d'un lent cornac
se donnait au dieu de l'arnaque.

Leibiz, disant "vers..." Quel bon ac-
teur pour ce "vers..." superbe. Oh "nach"!

Il vise, Emma, l'apoplexie
des grands buveurs de galaxie

Au club des rois du "spinach" (si
Bach n'y vint jamais, Banach si!)

Leibniz- son graphe ibo n'a qu'six
mus, trois nus, un phi bon à xi-

hante sans profit Bonn: "ach! Si
j'étais le grand Fibonnacci!!.. .

Le lecteur appréciera la progression des rimes d'une strophe à l'autre, et surtout les rimes riches des deux dernières strophes... Les 19 poèmes qui suivent dans le volume 1 expliquent et développent le premier. De façon générale, on ne saurait trop recommander les textes de l'OULIPO, qui sont un des endroits où les mathématiques croisent la littérature.

1.5 Annexe: quelques preuves géométriques et quelques exercices

1.5.1 Preuves géométriques

Dès que l'on commence à essayer de prouver les relations données au début du texte, et que l'on réfléchit sur la figure du pentagramme, on constate un grand nombre de relations; la difficulté est de savoir quelles relations prendre comme point de départ (comme axiome), et on se retrouve rapidement en train d'essayer de refonder la géométrie d'Euclide; dans un groupe de travail, on trouve en général plusieurs preuves différentes.

On peut par exemple remarquer que, par raison de symétrie, une diagonale du pentagone est parallèle au côté opposé; on en déduit de nombreux paralélogrammes.

On peut aussi montrer que tous les angles intervenant dans la figure sont des mutiples de $\pi/5$, ce qui donne des triangles isocèles; il suffit pour cela de montrer le théorème de l'angle au centre: si une portion d'un cercle est vue depuis un point de ce cercle sous l'angle α, elle est vue du centre depuis l'angle 2α. Cela se prouve facilement dans le cas particulier où le point du bord et l'une des extrémités de l'intervalle vu sont diamétralement opposés (voir figure 1.8). On en déduit facilement le cas général, en coupant ou en complémentant l'intervalle visé pour se ramener au cas particulier.

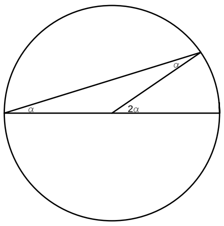


FIG. 1.8 – *Le théorème de l'angle au centre*

Exercice 1.2 *Comment construire un rectangle d'or?*

On appelle bien sûr rectangle d'or un rectangle tel que le quotient de la hauteur par la largeur est égal à ϕ. La contruction est donnée dans la figure ci-dessous: tracer un carré et prolonger les côtés horizontaux; placer le compas au centre de l'un des côtés horizontaux et l'étendre jusqu'à l'un des sommets opposés, puis tracer le cercle jusqu'à toucher la ligne qui étend le côté: on obtient le nombre d'or. Il suffit de tracer la perpendiculaire au côté horizontal passant par ce point.

Il est très facile de donner de cette construction une preuve algébrique: l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côté 1 et $\frac{1}{2}$ est de longueur $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Il est plus dur d'en donner une preuve géométrique...

Exercice 1.3 *Comment construire un pentagone de côté 1?*

En utilisant l'exercice précédent, on obtient un segment de longueur ϕ. En reportant ce segment depuis une des extrémités du segment de longueur 1, on obtient un cercle de rayon ϕ centré en ce point. On trace un cercle de longueur 1 depuis l'autre extrémité; un des deux points de l'intersection de ces cercles donne un triangle de côtés 1, 1 et ϕ. C'est le début du pentagone: il suffit d'itérer la construction pour l'obtenir.

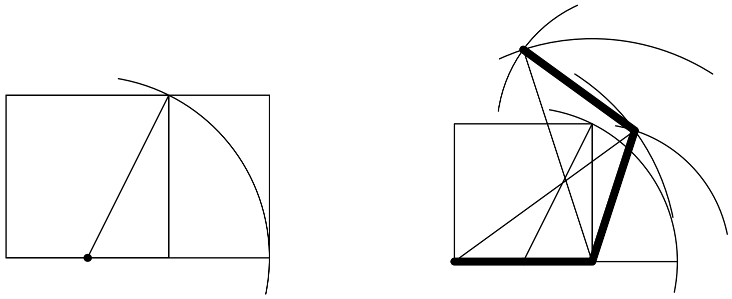


FIG. 1.9 – *Rectangle d'or et construction d'un pentagone régulier*

Exercice 1.4 *Comment construire un pentagone inscrit dans le cercle unité?*

La difficulté est ici de trouver la longueur du côté; si l'on suppose que le pentagone a un sommet en $(1,0)$, on peut essayer de construire le côté opposé, qui coupe l'axe des abscisses en $\cos(4\pi/5) = -\phi/2$, comme on le prouve ci-dessous.

1.5.2 Preuves algébriques

Exercice 1.5 *Que vaut* $\cos(2\pi/5)$*?*

On peut, par exemple, utiliser le plan complexe: si z est une racine cinquième de l'unité, elle vérifie $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$. On en déduit facilement, en remarquant que z^3 et z^4 sont les conjugués de z^2 et z, que $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$ sont les deux racines du polynôme $4X^2 + 2X - 1$; elles valent donc $\frac{-\phi}{2}$ et $\frac{1}{2\phi}$.

Une conséquence est que toute égalité algébrique à coefficients entiers satisfaite par l'une des deux valeurs $\cos(2\pi/5)$ et $\cos(4\pi/5)$ est aussi satisfaite par l'autre: en quelque sorte, l'algèbre est incapable de faire la différence entre un pentagone régulier et un pentagone étoilé.

Exercice 1.6 *Utiliser la figure 1.8 pour retrouver les formules classiques qui donnent le sinus et le cosinus en fonction de la tangente de l'arc moitié.*

1.5.3 Un peu de géométrie dans l'espace

On ne peut pas paver le plan avec des pentagones réguliers; si l'on dispose 3 pentagones autour d'un même sommet, on peut les faire se toucher deux à deux le long d'une arête en sortant du plan. Si l'on poursuit l'opération, on voit que la forme obtenue se referme avec 12 pentagones (ce n'est pas évident à prouver...); on a obtenu le dodécaèdre régulier, l'un des solides platoniciens, voir la Figure 1.10. Un petit exercice de dénombrement montre que chaque face possède 5 arêtes, ce qui fait donc 60 arêtes au total, mais on a compté chaque arête 2 fois: il y a donc 30 arêtes, et de même 20 sommets (car chaque sommet appartient à 3 faces).

Ce dodécaèdre a beaucoup de symétries: tous les sommets sont équivalents, donc on peut toujours envoyer un sommet sur un quelconque des 20 sommets; si l'on fixe un sommet, il y a encore

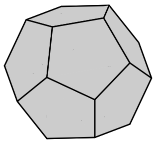


Fig. 1.10 – *Le dodécaèdre*

3 rotations possibles, qui permutent les faces adjacentes à ce sommet, et 3 symétries qui échangent deux de ces faces. Le dodécaèdre possède donc 60 symétries qui préservent l'orientation, et 60 qui la renversent.

Parmi les symétries qui préservent l'orientation, on compte 24 symétries d'ordre 5, (4 autour de chacun des 6 axes qui passent par les centres de faces), 20 symétries d'ordre 3 (2 autour des chacuns des 10 axes passant par les sommets) et 15 d'ordre 2 (les retournements autour des 15 axes passant par les centres de arêtes). Attention, le dodécaèdre admet une symétrie centrale autour de l'origine, il ne faut pas oublier de diviser par 2 quand on compte les axes. Avec l'identité, on retrouve bien nos 60 symétries.

Si l'on connaît la théorie des groupes, on vérifie sans trop de mal que le groupe des symétries du dodécagone est isomorphe au groupe A_5 des permutations paires sur 5 éléments; peut-on voir directement ces symétries comme permutations?

Après ce que nous avons vu, il est tentant de dessiner sur ce dodécaèdre les diagonales des faces; surprise... 3 des diagonales issues de chaque sommet sont deux à deux perpendiculaires, et forment le départ d'un cube inscrit dans le dodécaèdre, qui a pour sommet 8 des 20 sommets du dodécaèdre (voir Figure 1.11). Ce cube admet pour arête exactement une des 5 diagonales de chaque face; il y a donc 5 cubes inscrits dans un dodécaèdre régulier. Voici l'ensemble à 5 éléments cherché: chaque symétrie du dodécaèdre permute ces 5 cubes, les rotations autour des axes passant par les centres de faces donnent un cycle d'ordre 5, les rotations autour des axes passant par les sommets un cycle d'ordre 3 (elles fixent deux des cubes: lesquels?) et les symétries autour des axes passant par les centre des arêtes donnet deux transpositions disjointes (pour plus de détails, et une preuve explicite, consulter l'épreuve de l'agrégation interne de 2003).

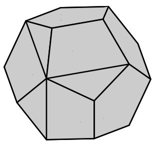


Fig. 1.11 – *Les diagonales du dodécaèdre*

Si l'on joint les centres des 12 faces, on obtient un autre solide régulier, dual du précédent, l'icosaèdre, qui a 20 faces triangulaires et 12 sommets, voir la Figure 1.12.

Ce solide possède bien sûr les mêmes symétries que le dodécaèdre. On peut s'amuser à tronquer un peu les pointes de cet icosaèdre: on voit apparaître en chaque sommet un petit pentagone régulier,

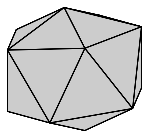


FIG. 1.12 – *l'icosaèdre*

et les faces deviennent des hexagones (on tronque chaque sommet d'un triangle équilatéral), voir figure 1.13

FIG. 1.13 – *L'icosaèdre tronqué*

Si l'on tronque au tiers de la longueur, on obtient un polyèdre semi-régulier, dont les faces sont des hexagones et des pentagones réguliers, et qui est bien connu des amateurs de sport, voir Figure 1.14.

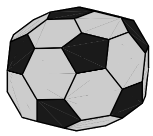


FIG. 1.14 – *le ballon de foot*

1.5.4 Quelques propriétés de la suite de Fibonacci

Exercice 1.7 *Comment approximer le rectangle d'or?*

On démarre par un carré de côté 1, et on fabrique une suite de rectangles en ajoutant à chaque étape un carré de côté la longueur du dernier rectangle construit. Il est facile de prouver que l'on construit ainsi une suite de rectangles dont les côtés sont deux nombres de Fibonacci consécutifs.

Exercice 1.8 *Quelles sont les puissances de la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*?*

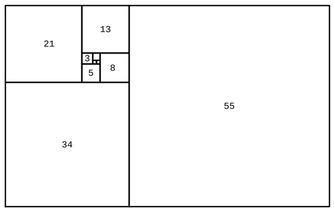


FIG. 1.15 – *Approximer le rectangle d'or*

On vérifie que ces puissances sont données par $\begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$.

Ceci donne un autre interprétation de la relation:

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n.$$

Elle nous dit simplement que la matrice M est de déterminant -1, donc ses puissances sont de déterminant $(-1)^n$; en particulier, en tant qu'application linéaires, elles préservent l'aire.

Une conséquence géométrique en est que le parallélogramme de côtés (F_n, F_{n+1}) et (F_{n+1}, F_{n+2}) est d'aire 1; il est donc très allongé, et ses côtés sont presque parallèles.

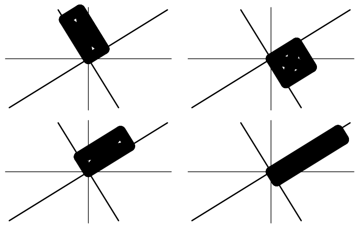


FIG. 1.16 – *Les images successives du carré sous l'action de M: l'aire est constante et les parallélogrammes s'allongent.*

Exercice 1.9 *Voici un petit problème géométrique pour terminer: on considère un rectangle de taille* 13×34*, et on le découpe comme dans la Figure 1.17, puis on le réassemble pour obtenir un carré* 21×21*; petit ennui: la taille du rectangle est paire, celle du carré est impaire. Où est l'arnaque?*

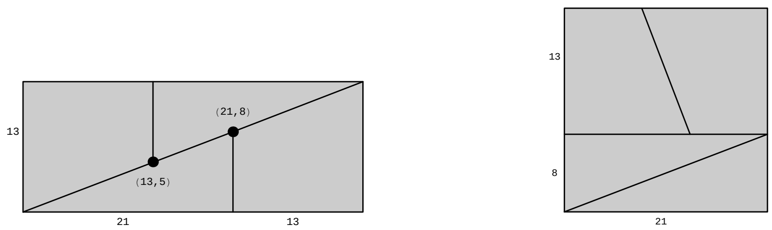


FIG. 1.17 – *Un problème de découpage*

1.5.5 un petit problème de calcul

Le problème suivant est à faire d'abord de façon numérique, avec une calculette, avant d'en chercher l'interprétation.

Exercice 1.10 *On définit une suite par récurrence par:* $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Calculer numériquement u_{100}.

Evaluer l'erreur commise sur u_{100}, *sachant que la machine calcule* u_1 *avec* n *décimale.*

Refaire le calcul sur plusieurs sortes de calculatrices.

Expliquer les résultats trouvés; que vaut vraiment u_{100} *?*

Indication: rappelez-vous qu'il y a deux suites du type de Fibonacci qui sont géométriques; ou reportez-vous à la section sur le comportement dynamique de l'application de Fibonacci.

Chapitre 2

Multiplier par le nombre d'or

2.1 Numération en base ϕ

La numération de Zeckendorff marche très bien pour les entiers, mais pas pour les nombres réels: comment écrire la partie fractionnaire avec les nombres de Fibonacci?

On va pour l'instant se restreindre à l'intervalle $[0,1[$ dans la mesure où le développement de réels supérieurs à 1 feraient intervenir des puissances positives et négatives (par exemple, on aurait $2 = \phi + \phi^{-2}$). Cette restriction à $[0,1[$ sera levée plus tard.

Définition 2.1 *Soit $x \in [0,1[$. On dit qu'une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers est un développement de x en base ϕ si*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n \phi^{-n}.$$

On notera alors

$$x = 0, \epsilon_1\epsilon_2 \ldots_\phi .$$

Par exemple, $\frac{1}{\phi}$ se note $\frac{1}{\phi} = 0,1_\phi$. De même, $\frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} = 0,011_\phi$. Ainsi, l'égalité $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3}$ se note

$$0,1_\phi = 0,011_\phi.$$

Les séries que nous avons étudiées au chapitre précédent nous donnent des égalités plus subtiles: la série $\frac{1}{\phi}+\frac{1}{\phi^3}+\frac{1}{\phi^5}+\cdots = 1$ peut s'écrire $1 = 0,101010101010\ldots_\phi$. L'autre série, $\frac{1}{\phi^2}+\frac{1}{\phi^3}+\frac{1}{\phi^4}+\cdots = 1$ nous donne l'égalité $1 = 0,01111111\ldots$.

Remarque. Il sera souvent utile de considérer des développements dont la fin est périodique (comme c'est le cas pour les rationnels en base 10). Dans ce cas, on placera une barre au dessus de la période, c'est-à-dire que $0,\overline{10}_\phi = 0,10101010101010\ldots_\phi$. Par exemple, les égalités que nous venons de considérer s'écrivent

$$1 = 0,\overline{10}_\phi = 0,0\overline{1}_\phi.$$

Existence du développement Il n'est pas très difficile de démontrer que tout $x \in [0,1[$ admet un développement en base ϕ, en utilisant ce que l'on appelle l'**algorithme glouton**, qui consiste à retirer de x la plus grande puissance possible de ϕ.

Plus précisément, l'algorithme glouton fonctionne selon les étapes suivantes:

1. soit $x = x_0$ un élément de $[0,1[$;
2. calculer n_0 le plus petit entier tel que $\phi^{-n_0} \leq x_0$ (noter qu'il est nécessairement positif);
3. poser $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$, $\ldots$, $\epsilon_{n_0-1} = 0$ et $\epsilon_{n_0} = 1$;
4. soit $k = 1$ et $x_1 = x_0 - \phi^{-n_0}$;
5. calculer $n_k = \min\{n \in \mathbb{N},\, \phi^{-n} \leq x_k\}$;
6. poser $\epsilon_{n_{k-1}+1} = 0$, $\epsilon_{n_{k-1}+2} = 0$, $\ldots$, $\epsilon_{n_k-1} = 0$ et $\epsilon_{n_k} = 1$;
7. définir $x_{k+1} = x_k - \phi^{-n_k}$;
8. poser $k := k+1$ et revenir à l'étape 5;

Nous pouvons alors prouver que la suite d'entiers ainsi obtenue founit un développement en base ϕ.

Proposition 2.2 *Pour tout réel $x \in [0,1[$, la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par l'algorithme glouton est telle que:*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n \phi^{-n}.$$

Preuve: Une relation fondamentale sur la suite x_k est la suivante :

$$0 \leq x_{k+1} < (\phi - 1)x_k.$$

En effet, selon la définition de n_k, on a $\phi^{-n_k} \leq x_k < \phi^{-(n_k-1)}$. On a ainsi

$$0 \leq x_{k+1} = x_k - \phi^{-n_k} < \phi^{-n_k+1} - \phi^{-n_k} = (\phi-1)\phi^{-n_k} \leq (\phi-1)x_k.$$

Puisqu'elle est majorée par une suite géométrique de raison $0 < \phi - 1 < 1$, la suite x_k, qui est à valeurs positives, tend vers 0. De plus, $x - \sum_{k=0}^{n} \phi^{-n_k} = x_{n+1}$ tend vers 0, ce qui signifie que $x = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{-n_k}$.

Du fait que $\phi < 2$, nous avons vu que $x_{k+1} < \phi^{-n_k}$ ce qui implique $n_{k+1} > n_k$. Ainsi, la suite n_k est strictement croissante, et on peut réécrire la série sous la forme $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n \phi^{-n}$. ■

Unicité sous conditions Il existe en base ϕ plusieurs façons de développer un réel. Plus précisément, deux exemples fondamentaux fournissent des développements multiples:

- La relation algébrique gouvernant ϕ, soit $1 + \phi = \phi^2$ donne

$$\frac{1}{\phi} = 0,1_\phi = 0,011_\phi.$$

- Une égalité plus subtile a été obtenue dans le cours précédent et décrite au début de cette section:

$$0,\overline{10}_\phi = 1.$$

  Cette égalité doit être vue comme l'analogue de l'égalité $1 = 0,9999\ldots$ en base 10. En particulier, en base 10, tout nombre rationnel admet deux développements décimaux : un développement fini et un autre se terminant par $999999\ldots$.
  Pour obtenir un unique développement décimal, il est nécessaire d'interdire les développements se terminant par $999999\ldots$. Nous allons agir de même ici et interdire les développements en base de Fibonacci se terminant par $1010101010\ldots$.

Pour obtenir l'unicité, on est ainsi amené à la définition suivante:

Définition 2.3 *On dit qu'une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers est un développement* admissible *si les ϵ_n valent 0 ou 1, s'il n'y a jamais deux 1 de suite, et si la suite ne termine pas par $\overline{10}$.*

On montre alors que cette condition d'admissibilité est suffisante pour caractériser complètement les développements en base ϕ. Plus précisément, on a le théorème qui suit.

Théorème 2.4 *L'algorithme glouton établit une bijection entre l'intervalle $[0,1[$ et l'ensemble des développements admissibles.*

Remarque. Ce théorème est très intuitif: il dit que les seules contraintes sur les développements en base ϕ sont celles que l'on a données ci-dessus, et qui dérivent directement de la relation fondamentale $\phi^2 = \phi + 1$. Par contre, la preuve qui suit est assez technique et délicate. Cela n'a rien d'étonnant: on sait bien que tout nombre réel admet un unique déveoppement en base 10 qui ne se termine pas par une infinité de 9; mais si on essaie de le démontrer, on s'aperçoit que, même dans ce cas élémentaire, la preuve est loin d'être facile.

Preuve: On peut adapter la preuve de l'existence d'un développement par l'algorithme glouton, pour prouver que tous les développements ainsi obtenus sont admissibles. En effet, si on suppose qu'il existe n pour lequel $\epsilon_n = \epsilon_{n+1} = 1$, il existera une étape k de l'algorithme glouton tel que

$$\phi^{-n} \leq x_k < \phi^{-n+1} \qquad \phi^{-n-1} \leq x_{k+1} = x_k - \phi^{-n} < \phi^{-n}.$$

La second inégalité implique $x_k \geq \phi^{-n-1} + \phi^{-n} = \phi^{-n-1}(1+\phi) = \phi^{-n-1}\phi^2 = \phi^{-n+1}$; ce qui est une contradiction avec la première inégalité.

De plus, si un développement se termine par $\overline{10}$, il existe un rang k tel que $x_k = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\phi^{2n}} = 1$. Or la suite x_k est décroissante à partir de $x < 1$, d'où une contradiction.

Ainsi, tout réel $x \in (0,1[$ admet un développement admissible.

Pour prouver l'unicité, on va montrer que deux développements admissibles produisent deux réels différents. Le plus simple est de considérer l'application réciproque, de l'ensemble des développements admissibles dans $\mathbb{R}$, qui à un développement ϵ associe $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \phi^{-n}$. On souhaite ainsi montrer que cette application est injective, ce qui prouvera le résultat cherché.

Pour cela, on va utiliser une propriété remarquable du développement en base ϕ: on peut directement comparer deux nombres par leurs développements (comme on le fait sans y penser en base 10). Plus précisément, on définit un ordre dit lexicographique sur l'ensemble des développements admissibles: δ est plus grand que ϵ si, au premier rang n où ils diffèrent, on a $\delta_n > \epsilon_n$.

Proposition 2.5 *L'application $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto 0, \epsilon_1\epsilon_2\ldots_\phi$ est strictement croissante pour l'ordre lexicographique sur l'ensemble des développements admissibles.*

Elle est donc injective, ce qui prouve le résultat considéré. La preuve, que nous laissons au lecteur le soin de compléter, repose sur le lemme suivant, très semblable à celui que l'on a utilisé dans le cours précédent pour montrer l'unicité du développement de Zeckendorff.

Lemme 2.6 *Si $(\epsilon_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ est une suite finie de 0 et de 1 qui ne contient pas deux 1 de suite, elle vérifie: $\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \phi^{-n} < 1$.*

Ce lemme se prouve aussi par récurrence sur N, en remarquant que l'hypothèse de récurrence à l'ordre N entraîne, à l'ordre suivant, $\sum_{n=2}^{N+1} \epsilon_n \phi^{-n} < \phi^{-1}$, ce qui prouve le résultat cherché si $\epsilon_1 = 0$, et $\sum_{n=3}^{N+1} \epsilon_n \phi^{-n} < \phi^{-2}$, ce qui prouve le résultat cherché si $\epsilon_1 = 1$, car dans ce cas $\epsilon_2 = 0$.

En passant à la limite, on voit que, pour toute suite ϵ de 0 et de 1 qui ne contient pas deux 1 de suite, on a $\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n \phi^{-n} \leq 1$, et que l'inégalité est stricte sauf pour le développement $0, \overline{10}_\phi$.

En particulier, si deux développements sont ordonnés pour l'ordre lexicographique : $\delta < \epsilon$; on note n_0 le premier rang où ils diffèrent. On sait dont que $\delta_{n_0} < \epsilon_{n_0}$, c'est-à-dire $\delta_{n_0} = 0$ et $\epsilon_{n_0} = 1$. Alors, $\sum_{n\geq 1} \epsilon_n \phi^{-n} - \sum_{n\geq 1} \delta_n \phi^{-n} = \epsilon_{n_0} \phi^{-n_0} + \sum_{n>n_0} (\epsilon_n - \delta_n) \phi^{-n} \geq \phi^{-n_0} - \sum_{n>n_0} \delta_n \phi^{-n} \geq 0$ puisque $\sum_{n>n_0} \delta_n \phi^{-n} \leq \phi^{-n_0}$ selon le lemme ci-dessus. Ainsi, la fonction développement est strictement croissante ce qui clot la démonstration. ∎

Remarquons que, pour tout développement qui est nul à partir d'un certain rang, il existe un développement non admissible qui donne le même réel et qui est périodique de période 10 à partir d'un certain rang (analogue des développements décimaux qui finissent pas 9999 . . .).

Développement de réels positifs On peut étendre ce système de numération de façon naturelle à tous les réels positifs, en considérant aussi des puissance positives de ϕ, et des séries $\sum_{n=-N}^{\infty} \epsilon_n \phi^{-n}$; on laisse au lecteur le soin d'étendre dans ce cadre les résutats précédents.

Généralisation à d'autres bases de développement L'algorithme glouton permet de montrer le même résultat d'existence d'un développement pour toute base $\beta > 1$, et pas seulement pour ϕ. Cependant, dans le cas général, on peut avoir à retirer un multiple entier d'une puissance de la base, si bien que les chiffres du développement sont les entiers strictement plus petits que β, c'est-à-dire $0, 1, \ldots, [\beta]$, où $[\beta]$ désigne la partie entière de β si β n'est pas entier, et $0, 1, \ldots, \beta - 1$ si β est entier (cas de la base 10).

Plus précisément, étant donné un réel $x_0 \in [0, 1[$, on définit une suite d'entiers n_k par un algorithme glouton proche de celui utilisé pour le nombre d'or:

$$n_k = \min \{n \in \mathbb{N},\, \beta^{-n} \leq x_k\}.$$

Cependant, on doit alors poser $\epsilon_{n_k} = \max \{a \in \{1 \ldots [\beta]\},\, a\beta^{-n_k} \leq x_k\}$ et $x_{k+1} = x_k - \epsilon_k \beta^{-n_k}$ pour que l'algorithme fonctionne: le nombre x_0 de départ s'écrira toujours

$$x_0 = \sum_{n>0} \epsilon_n \beta^{-n}.$$

Dans le cas du nombre d'or, les chiffres sont 0 et 1, puisque $1 < \phi < 2$. De même, le développement binaire ne fait intervenir que les chiffres 0 et 1 alors que le développement décimal nécessite les 10 chiffres $0, 1, \ldots, 9$.

Il est en général difficile de caractériser les développements admissibles dans une base β arbitraire; le cas de la base entière est à part, puisque tous les développements sont possibles, sauf ceux qui se terminent par une infinité de $\beta - 1$. Dans le cas du nombre d'or, il est remarquable, et dû à la propriété algébrique $\phi^2 = \phi + 1$, que l'on puisse aussi caractériser complètement, par une propriété simple (deux 1 non consécutifs), les développements donnés par l'algorithme glouton.

Un développement plus bizarre On a vu que le nombre d'or ϕ a une sorte d'ombre, son conjugué $\overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, qui partage avec lui bien des propriétés. On peut même définir un développement en base $\overline{\phi}$, même si cela peut sembler bizarre d'utiliser une base négative. Bien entendu, puisque $\overline{\phi}$ est de module inférieur à 1, on utilisera des puissances positives de $\overline{\phi}$; on peut prouver le résultat suivant, dont on laisse la démonstration au lecteur:

Théorème 2.7 *Tout nombre réel contenu dans l'intervalle* $[-\frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi}]$ *s'écrit d'au plus deux façons sous la forme* $\sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n \overline{\phi}^n$, *où* ϵ *est une suite de 0 et 1 qui ne contient pas deux 1 de suite. L'intervalle* $[-\frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi^3}]$ *correspond à* $\epsilon_2 = 0$, *et l'intervalle* $[\frac{1}{\phi^3}, \frac{1}{\phi}]$ *à* $\epsilon_2 = 1$.

Si on s'autorise à partir d'un rang $N \in \mathbb{Z}$ quelconque au lieu de 2, on peut développer tous les réels; il est intéressant de remarquer que l'on n'est pas limité aux réels positifs. Ce développement sera utile dans le prochain cours. Il est ici délicat de donner une condition qui implique l'unicité du développement, et il n'est pas évident de comparer deux nombres, à cause du signe négatif de la base.

2.2 Un calcul "dynamique" du développement en base ϕ

Pour calculer le développement en base ϕ de x, il existe un moyen plus simple que de comparer x à des puissances décroissantes de ϕ: c'est de multiplier x par ϕ, et de retrancher 1 quand on dépasse ϕ.

La ϕ-expansion

Définition 2.8 *On appelle ϕ-expansion l'application T_ϕ de l'intervalle* $[0,1[$ *dans lui même qui à* x *associe* $\phi x \mod 1$, *ou plus précisément:*

$$\begin{aligned} T_\phi : \quad & [0,1[\to [0,1[\\ & x \mapsto \phi x \ \text{si } x < \tfrac{1}{\phi} \\ & x \mapsto \phi x - 1 \ \text{si } x \geq \tfrac{1}{\phi}. \end{aligned}$$

On voit ci-dessous le graphe de l'application T_ϕ. Cette application est linéaire par morceaux, et continue sur les deux intervalles $I_0 = [0, \frac{1}{\phi}[$ et $I_1 = [\frac{1}{\phi}, 1[$.

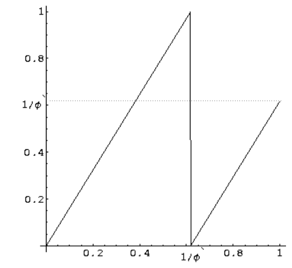


FIG. 2.1 – *La ϕ-expansion*

Un codage naturel On notera ν l'application ("numérotation") de $[0,1[$ dans $\{0,1\}$ qui, à un nombre réel de $[0,1[$, associe le numéro de l'intervalle auquel il appartient.

$$\begin{aligned}\nu : \quad & [0,1[\to \{0,1\} \\ & x \mapsto 0 \text{ si } x \in I_0 = [0, \tfrac{1}{\phi}[\\ & x \mapsto 1 \text{ si } x \in I_1 = [\tfrac{1}{\phi}, 1[.\end{aligned}$$

Le développement en base ϕ est l'itinéraire d'un point sous l'action de la ϕ-expansion L'algorithme glouton s'écrit de façon particulièrement simple dans ces notations:

Proposition 2.9 *Soit $x \in [0,1[$. Le développement $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de x en base ϕ est donné par*

$$\epsilon_n = \nu(T_\phi^{n-1}(x)).$$

Preuve: La preuve de cette proposition repose sur deux propriétés. Soit $x \in [0,1[$ et $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ son développement en base ϕ. On a alors

1. $\nu(x) = \epsilon_1$;
2. $T_\phi(x) = \sum_{n\geq 1} \epsilon_{n+1}\phi^{-n}$.

En effet, on sait que $x = \sum_{n\geq 1} \epsilon_n \phi^{-n} = \epsilon_1\phi^{-1} + \phi^{-1}\sum_{n\geq 1}\epsilon_{n+1}\phi^{-n}$. Selon le lemme 2.6, $0 \leq \sum_{n\geq 2}\epsilon_n\phi^{-n+1} < 1$. En particulier, si $\epsilon_1 = 0$, $x \in [0, \frac{1}{\phi}[$, ce qui implique $\nu(x) = 0 = \epsilon_1$ et $T_\phi(x) = \phi x = \sum_{n\geq 2}\epsilon_n\phi^{-n+1}$. Si $\epsilon_1 = 1$, on a $x \in [\frac{1}{\phi}, 1[$, ce qui implique $\nu(x) = 1 = \epsilon_1$ et $T_\phi(x) = \phi x - 1 = \sum_{n\geq 1}\epsilon_{n+1}\phi^{-n}$. ■

Ceci donne une toute autre façon de voir le développement de x en base ϕ: au lieu de l'interpréter de façon arithmétique, on peut l'interpréter de façon dynamique, comme "l'itinéraire" du déplacement de x sous l'action de T_ϕ, un itinéraire restreint à savoir dans lequel des deux intervalles I_0, I_1 tombent les images successives.

Dans la figure 2.2, on donne l'exemple du calcul de la trajectoire d'un point x_0, désigné par 0 sur la figure, qui se trouve dans l'intervalle I_0. On recherche d'abord $T_\phi(x_0)$, que l'on transpose sur l'axe des abscisses au point désigné par 1, et on retient le numéro de l'intervalle dans lequel il se trouve, c'est-à-dire I_1. On transpose ensuite $T_\phi(x_0)$ sur l'axe des abscisses pour calculer son image $T_\phi^2(x_0)$ et retenir l'intervalle dans lequel il se trouve... On trouve ainsi que le développement en base ϕ de x_0 commence par 01000.

Où la condition d'admissibilité apparaît naturellement L'introduction de ce point de vue dynamique présente le grand intérêt de mettre au jour de manière totalement naturelle la condition d'admissibilité *deux 1 non consécutifs* sur les développements qui a été introduite de manière quelque peu artificielle dans la partie précédente.

En effet, un simple calcul de l'image des bornes de I_0 et I_1 (qui se constate sur la Fig 2.1) montre la propriété suivante.

Proposition 2.10 *la partition $I_0 \cup I_1$ est Markovienne vis-à-vis de l'application T_ϕ : l'image de chaque élément de la partition est exactement égale à l'union de certains éléments de la partition.*

$$\begin{aligned} T_\phi(I_0) &= I_0 \cup I_1 \\ T_\phi(I_1) &= I_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

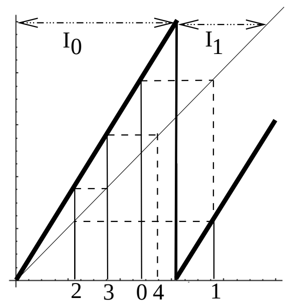


FIG. 2.2 – *La trajectoire d'un point sous l'action de T_ϕ*

Cette propriété de Markov est fondamentale dans la mesure où elle permet de décrire précisément les trajectoires :

- Si un point x appartient à l'intervalle I_1, son image $T_\phi(x)$ appartient obligatoirement à I_0. Cette image peut se trouver à n'importe quel endroit de I_0.
- Si un point x appartient à l'intervalle I_0, son image peut tomber à n'importe quel endroit de I_0 ou I_1.

Ce résultat s'interprète simplement sur les développements : si un point x admet un 1 au rang n de son développement, c'est-à-dire $T_\phi^n(x) \in I_1$, on aura obligatoirement $T_\phi^{n+1}(x) \in I_0$, c'est-à-dire que le $n+1$-ème terme de son développement sera 0. On retrouve ainsi la condition d'admissibilité *deux 1 ne doivent pas être consécutifs* introduite au début du cours.

Plus formellement, on introduit le graphe suivant, qui se déduit directement de la relation de Markov (2.1) : le sommet 0 peut-être suivi par un 0 ou un 1, le sommet 1 peut-être suivi par 0.

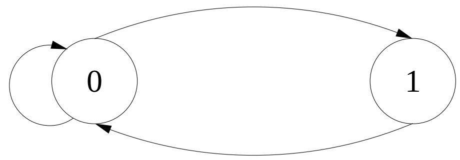


FIG. 2.3 – *Graphe de la partition de Markov*

Les développements admissibles sont ceux qui correspondent à un chemin sur le graphe, ce qui s'énonce comme suit.

Proposition 2.11 *Une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la trajectoire d'un point sous l'action de la ϕ-expansion dans la partition $I_0 \cup I_1$, c'est-à-dire soit le développement en base ϕ d'un point $x \in [0,1[$, soit une suite se terminant par $\overline{10}$, si et seulement s'il s'agit d'un chemin dans le graphe Figure 2.3.*

On notera que cette propriété se déduit naturellement de la relation de Markov (2.1) dans la mesure où l'image des intervalles I_0 et I_1 recouvre *entièrement* les intervalles concernés. Si, dans la formule (2.1), on avait disposé d'une simple inclusion au lieu d'une égalité, les trajectoires des points auraient encore été des chemins du graphe, mais tout chemin du graphe n'aurait pas nécessairement été la trajectoire d'un point.

Dans le cas général d'expansions en base β, il n'y a en général pas de partition de Markov; si elle existe, c'est que le nombre satisfait une relation algébrique, mais elle est alors souvent beaucoup plus compliquée à détailler. On peut alors lui associer un graphe qui décrit les développements en base β. C'est à partir de ce graphe qu'on trouve la condition d'admissibilité équivalente aux deux 1 non consécutifs. C'est la relation algébrique particulièrement simple satisfaite par ϕ qui donne un graphe aussi petit.

Développements impropres Il y a bien sûr un problème avec les développements impropres, qui finissent en $\overline{10}$, et qu'on ne peut exclure des chemins du graphe de la partition. Ce problème est dû à des raisons profondes, de nature topologique. Par exemple, si l'on regarde l'intervalle correspondant aux points dont le developpement commence par $(10)^n$, on trouve la famille d'intervalles $[1-\frac{1}{\phi^{2n}}, 1[$, dont l'intersection est vide.

Plus précisément, le problème essentiel est que l'intervalle $[0,1[$ est connexe, alors que l'ensemble des développements possibles ne peut pas l'être: ainsi, quand on “digitalise”, on introduit forcément des sauts. De la même façon, dans le système décimal, les nombres 1 et 0,9999 sont proches, mais leurs développements sont très différents... A cause de ces différences de connexité, il ne peut y avoir une correspondance parfaite (c'est-à-dire continue) entre $[0,1[$ et l'ensemble des chemins des développements possibles; il est nécessaire de rajouter les développements impropres.

2.3 Exemple de chaos?

Cette description de la ϕ-expansion au moyen du développement d'un point en base ϕ nous permet de prouver simplement quelques propriétés de cette application que l'on peut résumer d'un mot: nous allons voir que la ϕ-expansion est un exemple d'**application chaotique**.

Grand nombre de points périodiques Un premier résultat caractéristique d'une application chaotique est le nombre de points périodiques qu'elle possède : une application régulière et prévisible contient peu de points périodiques. Or, la ϕ-expansion possède partout des points périodiques.

Proposition 2.12 *L'ensemble des points périodiques de l'application T_ϕ est dense dans $[0,1[$.*

Preuve: Selon la Proposition 2.9, il est facile de voir qu'un point est périodique pour la ϕ-expansion: il faut et il suffit que son développement en base ϕ soit périodique.

D'autre part, on vérifie que deux points qui ont même développement en base ϕ jusqu'au rang N diffèrent d'au plus $\frac{1}{\phi^{N-1}}$.

Soit x un point quelconque de $[0,1[$; soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ son développement en base ϕ, et $d>0$. Pour obtenir un point périodique de T_ϕ qui est à une distance de x inférieure à d, il suffit de choisir N assez grand pour que ϕ^{1-N} soit inférieur à d, et tel que $\epsilon_N = 0$ (c'est toujours possible). Le point $y = \overline{\epsilon_1 \ldots \epsilon_N}$ répond à la question. En particulier, il faut demander que ϵ_N soit égal à 0, car si ϵ_1 et ϵ_N valaient tous deux 1, le développement obtenu par répétition ne serait pas admissible. ■

Imprévisibilité à long terme Une autre propriété typique d'une situation chaotique est l'imprévisibilité à long terme de l'application. C'est une situation fréquente en physique, où bien des problèmes ont cette propriété, à commencer par un système qui nous intéresse tous, celui de la météorologie: ce n'est pas parce que les conditions métérologiques d'un jour donné sont proches des conditions métérologiques d'un jour donné l'année précédente, que le temps va évoluer exactement de la même manière : la petite différence entre les conditions météo des deux jours considérés, même si elle est infime, va finalement donner de très grosses différences dans le futur.

De même, la ϕ-expansion dépend de façon très sensible des conditions initiales: si l'on part de deux points proches, leur distance est multipliée par ϕ à chaque étape, et ils divergent rapidement, si bien qu'au bout d'un certain temps, rien ne permet de voir que les points ont été proches dans le passé. Inversement, deux points proches dans le futur peuvent avoir été sensiblement éloignés dans le passé.

Proposition 2.13 *Si x et y sont deux points de $[0,1[$ qui sont tous les deux dans le même intervalle I_0 ou I_1, alors $|T_\phi(y) - T_\phi(x)| = \phi|y-x|$.*

Assez rapidement, les images des deux points de départ se retrouvent donc dans deux intervalles différents.

La conséquence pratique est que, quand on a calculé n termes du développement, on n'est pas plus avancé pour calculer le suivant, mis à part le fait que si le dernier terme est un 1, le suivant est un 0. De la même façon, quand on joue à pile ou face, ce n'est pas parce que l'on vient de tirer pile 10 fois de suite que l'on a plus de chance de tirer face au coup suivant...

Pour un tirage à pile ou face, n'importe quelle suite peut être suivie de n'importe quelle autre. Ici il y a une restriction: une suite qui finit par 1 ne peut pas être suivie d'une suite qui commence par 1, mais c'est la seule restriction.

Entropie Plus généralement, une quantité a été définie par les physiciens et mathématiciens pour mesurer le comportement chaotique d'une application: il s'agit de son entropie. Schématiquement, il s'agit de compter le nombre d'*itinéraires de longueur n* possibles, c'est-à-dire le nombre de débuts de longueur n différents pour des développements admissibles en ϕ.

Proposition 2.14 *Soit n un entier.*

- *Pour le développement décimal, il existe 10^n débuts de longueur n possibles;*
- *pour le développement binaire, il existe 2^n débuts de longueur n possibles;*
- *pour le développement en base de Fibonacci, il existe F_{n+2} débuts de longueur n possibles.*

Preuve: En base 10, tous les développements possibles sur les chiffres $0, \ldots, 9$ sont admissibles (sauf ce qui se terminent par $\overline{9}$), si bien qu'il y a 10^n débuts de longueur n possibles, depuis $00\ldots0$ jusqu'à $99\ldots9$. De même, en binaire, on a 2^n débuts possibles.

Le calcul est un peu plus complexe pour le nombre d'or, dans la mesure où les développements admssibles doivent vérifier la condition d'admissibilité *deux 1 non consécutifs*. Soit H_n le nombre de débuts possibles pour les développements en base de Fibonacci. Parmi ces développements, ceux qui commencent par 0 sont suivis de $n-1$ termes vérifiant la conditions *deux 1 non consécutifs*, et sont donc au nombre de H_{n-1}. Ceux qui commencent par 1 sont suivis d'un 0 et de $n-2$ termes qui vérifient la condition d'admissibilité; ils sont donc au nombre de H_{n-2}. Ainsi, H_n vérifie la relation de Fibonacci $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$.

Enfin, il y a deux débuts possibles de longueur 1 (0 et 1), et 3 débuts possibles de longueur 2 (01, 00 et 10), ce qui permet de conclure que $H_n = F_{n+2}$. ■

Comment estimer l'information supplémentaire apportée en moyenne par la connaissance d'un nouveau chiffre du développement? On peut montrer qu'elle est donnée par un nombre appelé entropie du système:

Définition 2.15 *Soit H_n le nombre d'itinéraires de longueur n; on appelle entropie du système le nombre $\lim_{n\to\infty} \frac{\log H_n}{n}$.*

On peut montrer que ce nombre ne dépend que de l'application considérée: si, pour une application donnée, on considère les itinéraires par rapport à une autre partition, on trouvera toujours la même entropie, à condition que la partition sépare les points (c'est-à-dire que deux points différents finissent par atterrir dans deux ensembles différents).

Pour la multiplication par 2 modulo 1, associée au développement binaire, cette entropie est $\log 2$; pour la multiplication par 10, associée au développement décimal, elle est de $\log 10$, donc plus grande, ce qui est normal: on voit bien qu'un chiffre supplémentaire donne plus d'information en base 10 qu'en base 2. Et en base ϕ? les calculs que nous avons fait précédemment nous donnent la réponse:

Théorème 2.16 *L'entropie de la ϕ-expansion est* $\log \phi$.

Preuve: On a vu que le nombre H_n d'itinéraires de longueur n est F_{n+2}. On cherche donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\log F_{n+2}}{n}$.

Mais le cours précédent nous a donné une formule explicite pour F_n; on est donc ramené à calculer:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{\phi^{n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\overline{\phi}^{n+2}}{\sqrt{5}}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{\phi^{n+2}}{\sqrt{5}}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\log\phi - \log\sqrt{5}}{n} = \log\phi$$

■

On voit que cette entropie est plus faible que pour le développement en base 2, ce qui est normal: il y a en effet des cas où le chiffre n'apporte aucune information. Si un chiffre du développement est égal à 1, le chiffre suivant doit être égal à 0: il n'apporte aucun renseignement.

De manière générale, l'entropie d'un système sur son caractère chaotique: plus l'entropie est importante, plus son comportement est difficile à déterminer. Grossièrement, un système est considéré comme régulier (ou déterministe) à partir du moment où son entropie est nulle. Ce n'est évidemment pas le cas de la ϕ-expansion.

2.4 Suite de pavages associé à la numération

Les développements finis en base ϕ permettent de définir une suite de pavages de l'intervalle $[0,1[$ comme suit (voir Figure 2.4).

- Le premier terme du développement sépare l'intervalle en deux parties, un grand intervalle $[0,\frac{1}{\phi}[$, où le développement commence par 0, un petit intervalle $[\frac{1}{\phi},1[$, où il commence par 1.
- Si on considère les deux premiers termes du développement, on voir que le premier intervalle $[0,\frac{1}{\phi}[$ se découpe en deux sous-intervalles, correspondant à 00 et 01, tandis que le premier reste entier, puisque 1 est forcément suivi par 0, donc il ne peut être prolongé qu'en 10. On a donc trois intervalles; deux sont longs (ceux qui correspondent aux débuts de taille 2 finissant par 0) et le troisième est court (il correspond aux débuts de taille 2 finissant par 1).
- A l'étape 3, nous trouvons 5 développements possibles: les deux intervalles précédents qui finissaient en 0 se sont divisés en 2 à leur tour. 3 intervalles sont longs (ils correspondant encore aux débuts de taille 3 finissant par 0) et 3 intervalles sont courts (débuts de taille 3 finissant par 1).

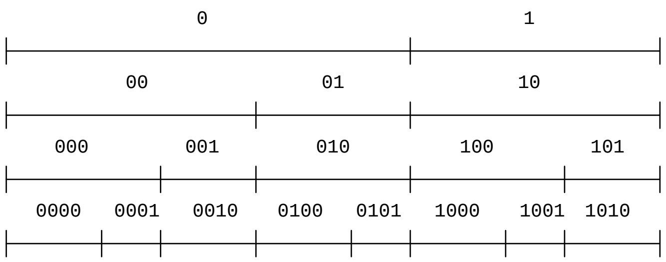


FIG. 2.4 – *Quatre étapes du pavage de Fibonacci*

La figure ci-dessous montre les étapes 1 à 4 du processus; on voit qu'à l'étape 4 il y a 8 intervalles, 5 grands (de type 0) et 3 petits (de type 1).

Le lecteur qui est maintenant habitué n'a pas manqué d'observer les nombre des intervalles: $2, 3, 5, 8 \ldots$. Ce ne peut être que la suite de Fibonacci, qu'il n'est pas très étonnant de voir surgir là, vu qu'on est en fait en train de compter le nombre d'itinéraires de longueur n possibles, comme on l'a fait à la section précédente. Une fois qu'on a vu cette régularité, on la démontre immédiatement.

Proposition 2.17 *Les développements finis de longueur n découpent l'intervalle $[0, 1[$ en F_{n+1} pavés de taille $\frac{1}{\phi^n}$ et F_n pavés de taille $\frac{1}{\phi^{n+1}}$.*

Preuve: Si U_n est le nombre de pavés dont le nom est de taille n et fini par 0, et V_n le nombre de pavés dont est de taille n et fini par 1 (pavés de type 0 et 1), on vérifie immédiatement que l'on a $U_{n+1} = U_n + V_n$, et $V_{n+1} = U_n$. L'unique solution de cette suite est explicitement donnée par $U_n = F_{n+1}$ et $V_n = F_n$.

Il reste à calculer la longueur des pavés. Soit un développement fini $\epsilon_1, \ldots \epsilon_n$. Si $\epsilon_n = 0$, le pavé associé à ce développement est l'ensemble des points $x_n + \phi^{-n} \sum_{k\geq 1} \epsilon_{n+k}\phi^{-k}$, où $x_n = \sum_{k\leq n} \epsilon_k \phi^{-k}$ et $(\epsilon_{n+k})_{k\geq 1}$ est une suite quelconque admissible. Ainsi, le pavé est $[x_n, x_n + \phi^{-n}]$. Si par contre $\epsilon_n = 1$, la suite $(\epsilon_{n+k})_{k\geq 1}$ doit être admissible mais aussi commencer par 0. Ainsi, le pavé est égal à $[x_n+, x_n + \phi^{-n-1}]$. Finalement, un pavé de type 0 est toujours de longueur $\frac{1}{\phi^n}$ et un pavé de type 1 est toujours de longueur $\frac{1}{\phi^{n+1}}$. ∎

Remarque. Chemin faisant, le lecteur peut s'amuser à prouver l'égalité que nous venons d'obtenir:

$$1 = F_{n+1}\phi^{-n} + F_n\phi^{-(n+1)},$$

puisque les intervalles de type 0 et 1 forment une partition de l'intervalle $[0, 1[$.

Régularité au sein des pavages? Remarquons qu'en s'arrêtant à l'ordre n, on définit un pavage de l'intervalle $[0, 1[$ par deux type d'intervalles : des longs et des courts. On peut recoder ces pavages de $[0, 1[$ en retenant seulement les tailles. Cela donne

- Etape 1: Long. Court
- Etape 2: Long. Court. Long
- Etape 3: Long. Court. Long. Long. Court
- Etape 4: Long. Court. Long. Long. Court. Long. Court. Long

On remarquera que chaque étape commence par la précédente. En fait, si on entre dans les détails, la combinatoire du pavage (fini) d'ordre n est le début de la combinatoire d'ordre $n + 1$.

Par exemple, sur le dessin ci-dessus, on a une correspondance complète entre les 5 intervalles de gauche pour le dernier pavage (ordre 4) et le pavage précédente; les noms des pavés à l'ordre 3 se déduisent des noms de pavés à l'ordre 4 en retirant le 0 du début.

Le lecteur, avant d'entamer le prochain cours, pourra rechercher la règle qui permet de passer du pavage d'ordre n au pavage d'ordre $n+1$...

2.5 Application : une régularité statistique

Les pavages donnés dans la section précédente permettent de faire émerger du chaos que constitue la ϕ-expansion une régularité, qui est de nature probabiliste.

En effet, avant celà, rappelons les faits suivants sur les développements binaires et décimaux. Avec le terme proportion, on désigne la longueur totale de l'ensemble des points considérés.

- La proportion dans $[0,1[$ de l'ensemble des points $x \in [0,1[$ qui admettent un 0 au rang n de leur développement binaire est toujours égale à $\frac{1}{2}$.
- La proportion dans $[0,1[$ de l'ensemble des points $x \in [0,1[$ qui admettent un 4 au rang n de leur développement décimal est toujours égale à $\frac{1}{10}$.

Pour le développement en base ϕ, le comportement est sensiblement différent: les chiffres 0 et 1 ne sont plus équitablement répartis sur l'ensemble $[0,1[$, et les proportions relatives de 0 et de 1 changent avec n.

Lemme 2.18 *La proportion de l'ensemble des points $x \in [0,1[$ qui admettent un 0 au rang n de leur développement en base ϕ est égale à $\frac{F_{n+1}}{\phi^n}$. Les points qui admettent un 1 au rang n de leur développement forment un ensemble de longueur $\frac{F_n}{\phi^{n+1}}$.*

Preuve: On utilise la proposition 2.17 en additionnant les longueurs des intervalles. ■

En particulier, le rapport entre ces deux quantités tend rapidement vers ϕ^2. Ainsi, grossièrement, on peut dire que *en tirant un nombre au hasard dans $[0,1[$ on a environ ϕ^2 fois plus de chance que ce nombre ait un 0 plutôt qu'un 1 au rang n de son développement.*

Un raisonnement considérablement plus dur (loi forte des grands nombres) nous permet d'en déduire que **le développement d'un point x tiré au hasard dans $[0,1[$ contient ϕ^2 fois plus de 0 que de 1**.

On peut dire cela autrement : pour tout point $x \in [0,1[$, le début de longueur n de son développement contient statistiquement ϕ^2 fois plus de 0 que de 1. Ainsi,

la proportion de 1 dans le développement en base ϕ d'un point x est preque sûrement $\frac{1}{1+\phi^2}$.

On parlera de fréquence du chiffre 1 dans le développement.

Ce résultat est la généralisation de la propriété qui dit que le développement binaire de $x \in [0,1[$ contient presque sûrement autant de 0 que de 1: il revient au même de tirer une infinité de fois à pile ou face avec une pièce équilibrée, et dans ce cadre, la loi forte des grands nombres nous dit que, presque sûrement, la proportion de face existe et vaut $\frac{1}{2}$.

Le résultat exact s'énonce comme suit. Une preuve rigoureuse nécessite l'introduction de la notion de mesure, de fréquence et de chaine de Markov. Elle est abordée en annexe.

Théorème 2.19 *Presque surement, la fréquence de 1 dans le développement en base ϕ d'un point x tiré au hasard dans $[0,1[$ est égale à $\frac{1}{1+\phi^2}$.*

On a bien extrait, de ce chaos apparent, des régularités à long terme. Attention toutefois, ces régularités ne sont que statistiques. Il n'est pas difficile de donner des nombres pour lesquels ces régularités sont fausses (par exemple pour $0,\overline{100}_\phi$, mais ces nombres ne sont pas statistiquement représentatifs).

2.6 Compléments

2.6.1 Une démonstration avec des chaînes de Markov

Ceux qui connaissent les graphes probabilistes, ou chaîne de Markov (voir programme de spécialité de Terminale ES),, donneront un preuve formelle du théorème précédent, en regardant l'évolution d'une histoire dans le temps (passage de l'étape n à $n+1$):

- Si on est dans l'intervalle 1, on passe au cran d'après dans l'état 0 avec probabilité 1.
- Si l'on est dans l'état 0, on passe au cran d'après dans l'état 1 avec probabilité $\frac{1}{\phi^2}$, proportionnelle à la longueur de l'intervalle I_1.

On part dans l'état 0. Ce que nous cherchons, c'est la probabilité limite pour cette chaîne de Markov, c'est-à-dire la vecteur propre à gauche de la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ce vecteur propre se calcule facilement, car la plus grande valeur propre d'une telle matrice est toujours 1, il suffit donc de chercher un vecteur invariant. Ce vecteur, normalisé pour que la somme des coefficients soit 1, est $(\frac{\phi^2}{1+\phi^2}, \frac{1}{1+\phi^2})$: c'est bien le résultat que nous avons trouvé.

Remarque. Ce résultat n'est qu'asymptotique: on se rapproche de la fréquence limite.

D'un autre côté, on sait que si l'on démarre une chaîne de Markov avec la probabilité invariante, elle ne bouge plus; peut-on obtenir ce résultat ici? C'est possible, et même assez simple: on prend la probabilité à densité constante f sur l'intervalle I_0, de valeur $\frac{\phi^3}{1+\phi^2}$, et constante sur l'intervalle I_1, de valeur $\frac{\phi^2}{1+\phi^2}$ (vérifiez que c'est bien une densité de probabilité, qui donne les probabilités demandées aux intervalles I_0 et I_1). On peut montrer le résultat suivant:

Théorème 2.20 *Si on tire x au hasard sur $[0,1[$, avec la probabilité à densité f, alors $T_\phi(x)$, et plus généralement $T_\phi^n(x)$, est réparti sur l'intervalle $[0,1[$ avec la même probabilité.*

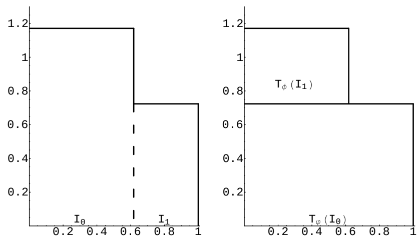


FIG. 2.5 – *La densité invariante pour la ϕ-expansion, et son image*

La preuve du théorème est essentiellement contenue dans la figure 2.5: si x est dans l'intervalle I_0, alors son image est n'importe où dans l'intervalle unité, avec une probabilité uniforme de densité constante $\frac{\phi^2}{1+\phi^2}$; mais si x est dans I_1, son image ne peut être que dans I_0, avec une probabilité de densité constante sur I_0, de valeur $\frac{\phi}{1+\phi^2}$; la propriété arithmétique de ϕ fait que la loi de répartition de $T_\phi(x)$ est alors la même que celle de x.

2.6.2 Pavage de $[0, \infty[$ donné par les parties entières en base ϕ

On peut aussi paver $[0, \infty[$ en fonction du nombre d'or. En effet, comme on l'a dit au début de ce cours, on peut développer un nombre réel quelconque en base ϕ en introduisant des puissances positives. Par exemple, on a $3 = \phi^2 + \frac{1}{\phi^2} = 100,01_\phi$; on peut alors définir ue partie entière en base ϕ, qui serait dans ce cas 100_ϕ.

Si l'on considère les nombre réels qui ont une partie entière donnée en base ϕ, on obtient un intervalle, qui est de longueur 1 ou $\frac{1}{\phi}$ suivant que la partie entière se termine par 0 ou 1.

Proposition 2.21 *Les intervalles formés de réels ayant même partie entière en base ϕ forme une partition de la demi-droite $[0, +\infty[$ par des intervalles de deux longueurs différentes.*

Une telle partition en un nombre fini d'intervalles est appelée un *pavage* de la droite.

Ce pavage possède de nombreuses propriétés; les partitions successives de l'intervalles $[0, 1[$ que nous avons construites ci dessus sont toutes homothétiques de ce pavage.

Il n'est pas facile de voir comment engendrer systématiquement la suite des intervalles. Si nous ne gardons que la "combinatoire" du pavage, c'est-à-dire la suite des types des intervalles consécutifs, nous obtenons une suite infinie qui commence par $01001010010\ldots$; comment continuer de façon "automatique"?

Nous laissons au lecteur le soin de constater que le n-ième intervalle est de type 1 si et seulement si le développement de Zeckendorff de n se termine par un 1, et d'essayer de le prouver. Dans le prochain cours, nous donnerons une (et même plusieurs) méthode effective pour engendrer cette suite et ce pavage.

Chapitre 3

Additionner le nombre d'or

3.1 L'addition du nombre d'or

Durant les deux premières journées, tout ce qu'on a vu était relié à la multiplication par ϕ; la deuxième journée à été essentiellement consacrée à l'étude de l'application T_ϕ sur l'intervalle unité.

Il est naturel de se demander s'il n'y aurait pas quelque chose à faire avec l'addition de ϕ.

Si l'on se contente de regarder l'addition de ϕ sur $\mathbb{R}$, en partant de n'importe quel point, on part à l'infini, et le résultat n'est pas très intéressant; on obtient un objet plus intéressant si l'on ne garde que la partie fractionnaire, et que l'on reste dans l'intervalle unité (c'est d'ailleurs ainsi que l'on a défini l'application T_ϕ).

Il est agréable pour la suite de définir quelques notations:

Définition 3.1 *Soit x un nombre réel; on appelle partie entière de x, et on note $[x]$, le plus grand entier inférieur ou égal à x. On appelle partie fractionnaire de x, et on note $\{x\}$ ou $x \bmod 1$, le nombre réel $x - [x]$.*

Il est clair que $\{x\}$ est toujours contenu dans l'intervalle $[0, 1[$. L'application qui nous intéresse s'écrit très simplement avec cette notation:

Définition 3.2 *On appelle rotation par le nombre d'or, et on note R_ϕ, l'application:*

$$R_\phi : \begin{array}{ccc} [0,1[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & \{x+\phi\} \end{array}$$

De la propriété fondamentale de ϕ, on déduit $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ et donc

$$\{\phi\} = \phi - 1 = \frac{1}{\phi}.$$

En particulier, on a

$$\forall\, x \in [0,1[,\ R_\phi(x) = \{x + \phi\} = \{x + \frac{1}{\phi}\}.$$

L'application R_ϕ est linéaire par morceaux et admet deux intervalles de continuité, avec une discontinuité en $\frac{1}{\phi^2}$, et bijective; une première représentation peut en être donnée par son graphe donné figure 3.1. On note J_0 le grand intervalle de continuité et J_1 le petit. Une formule explicite pour R_ϕ est alors donnée comme suit.

Proposition 3.3

$$\begin{cases} R_\phi(x) &=& x - \frac{1}{\phi^2} & si \ \in J_0 = [\frac{1}{\phi^2}, 1[, \\ R_\phi(x) &=& x + \frac{1}{\phi} & si \ \in J_1 = [0, \frac{1}{\phi^2}[. \end{cases}$$

Preuve: Si $x \in J_1$, on voit que $x + \frac{1}{\phi} < 1$, donc $R_\phi(x) = x + \frac{1}{\phi}$. Par contre, si $x \in J_0$, on a $x + \frac{1}{\phi} \geq 1$, donc $R_\phi(x) = x + \frac{1}{\phi} - 1$; mais $\frac{1}{\phi} - 1 = -\frac{1}{\phi^2}$, d'où le résultat. ■

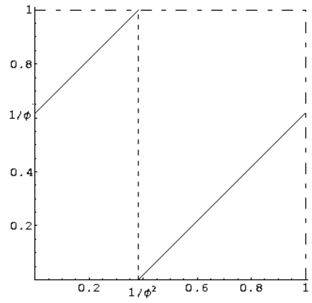


FIG. 3.1 – *Le graphe de R_ϕ*

3.2 Echange d'intervalles

Une autre représentation possible consiste à remarquer que cette application est une translation par morceau sur deux intervalles. Comme indiqué à la proposition 3.3, on translate par la quantité positive $1/\phi$, sur un petit intervalle appelé J_1. Sur le grand intervalle J_0, on translate par la quantité négative $1/\phi - 1 = -\frac{1}{\phi^2}$, ce que l'on peut représenter comme dans la figure 3.2. On y constate bien que cette application revient juste à échanger les deux intervalles de continuité J_0 et J_1.

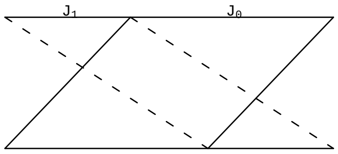


FIG. 3.2 – *La rotation R_ϕ comme translation de deux intervalles*

Remarque. La seule chose qui compte vraiment pour étudier cette application, c'est le rapport des longueurs des deux intervalles; le reste est une pure convention. Il est agréable, quand on fait de l'arithmétique, de paramétrer cet intervalle par $[0, 1[$, mais on pourrait normaliser la longueur de façon différente (par exemple par 2π), ou prendre un autre point de départ (par exemple $[1/\phi - 1, 1/\phi[$).

3.3 rotation sur le cercle

Dans le fond, la discontinuité en $\frac{1}{\phi^2}$ est artificielle: nous ne nous intéressons en effet qu'à la partie fractionnaire d'un nombre, c'est à dire que nous considérons comme équivalents deux nombres qui diffèrent par un entier. Un moyen concret d'identifier les entiers est de se placer sur le cercle, via par exemple l'exponentielle complexe, qui permet d'identifier presque parfaitement $[0,1[$ avec le cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$. L'application R_ϕ devient alors une véritable rotation sur $\mathbb{U}$, d'où son nom :

$$\exp(2i\pi R_\phi(x)) = \exp(2i\pi\phi)\exp(2i\pi x).$$

Si l'on considère que l'application R_ϕ est définie sur le cercle, on trouve une autre façon de la représenter, donnée figure 3.3. On travaille donc sur un cercle, dont on a par convention normalisé la longueur à 1 (au lieu de 360 ou 2π comme on le fait d'habitude), et sur lequel on tourne de $1/\phi$ tour. Il n'y a plus de discontinuité dans cette représentation; c'est plus simple pour comprendre ce qui se passe, mais c'est moins pratique pour faire les calculs: on ne peut pas avoir le beurre et l'argent du beurre...

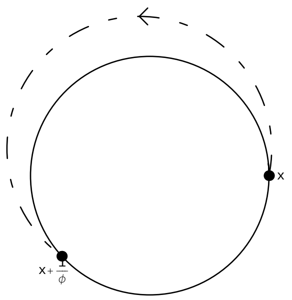


FIG. 3.3 – *La rotation R_ϕ sur le cercle*

Remarque. On retrouve le problème classique de la mesure des angles; si l'on veut bien comprendre ce qui se passe, on est obligé de se plonger dans quelques finesses de topologie: l'application $e^{2i\pi x}$, de $[0,1[$ dans le cercle unité, ou, ce qui revient au même, la projection canonique de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, est une bijection continue, mais sa réciproque n'est pas continue: ce n'est pas un homéomorphisme; autrement dit, comme chacun le sait bien intuitivement, un cercle et un intervalle, ce n'est pas la même chose. Pour passer d'un cercle à un intervalle, il faut casser le cercle, et c'est ce qui produit la discontinuité que nous avons vue dans le premier graphe.

3.4 Les rotations sont extrèmement rigides

On pourrait plus généralement considérer un nombre α, et la rotation R_α d'angle α.

$$\forall x \in [0,1[,\ R_\alpha(x) = \{x+\alpha\}.$$

On obtient ainsi des système dynamiques très différents de celui que nous avons considéré dans les cours précédents.

Bijectivité L'application R_α est naturellement bijective; on peut donc aussi bien définir l'image réciproque que l'image directe d'un point.

Dépendance aux conditions initiales Ensuite, les rotations ne sont pas sensibles aux conditions initiales. Pour exprimer cela formellement, nous allons montrer que les rotations préservent une distance naturelle dérivée de la représentation de l'intervalle comme un cercle.

Plus précisément, deux points x, y du cercle divisent ce cercle en deux intervalles, de longueur respectives $|x-y|$ et $1-|x-y|$; il est naturel de prendre pour distance entre deux points du cercle la longueur du plus petit de ces intervalles.

Définition 3.4 *La métrique circulaire sur l'intervalle* $[0,1[$ *est définie par* $d(x,y) = \inf(|x-y|, 1-|x-y|)$*; c'est une distance sur l'intervalle.*

Proposition 3.5 *Toute rotation* R_α *préserve la métrique circulaire. En particulier, si l'on part de deux point proches, ils restent donc toujours proches sous l'action de l'application.*

Preuve: On pourrait le montrer par le calcul; il est plus simple de le vérifier géométriquement, en remarquant que la rotation tourne les deux intervalles déterminés par deux points sur le cercle, sans modifier leur longueur. ■

Répartition des trajectoires Rappelons que l'**orbite** ou la **trajectoire** d'un point x est l'ensemble des points obtenus par itération successive de l'application sur le point x

$$\{R_\alpha^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dans le cas les rotations, la répartition de ces trajectoires est parfaitement connue, grâce à un théorème classique dû à Kronecker.

Théorème 3.6 *Si* α *est rationnel, la trajectoire de tous les points de l'intervalle est périodique de même période. Si* α *est irrationnel, tous les points ont une orbite dense.*

C'est une conséquence simple d'un lemme classique, qui dit que tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est discret ou dense, et dont la preuve est laissée en annexe.

En particulier, on voit que la rotation R_ϕ n'a aucune orbite périodique, puisque ϕ est irrationnel. On a même une propriété plus forte.

Définition 3.7 *On dit qu'un système dynamique est* minimal *si l'orbite de tout point est dense.*

Le thèorème que nous avons vu peut donc se réécrire:

Proposition 3.8 *Une rotation* R_α *est minimale si et seulement si* α *est irrationnel.*

L'orbite de tout point passe donc aussi près que l'on veut de n'importe quel point donné; on pourrait penser que c'est un signe de grand désordre pour le système, mais c'est exactement le contraire: cela veut dire que toute les orbites sont semblables, et c'est au contraire un **signe de grande rigidité**: un système vraiment désordonné possède des orbites de type très divers, et en particulier beaucoup d'orbites périodiques.

Un phénomène naturel Ce genre de considérations intervient dès que l'on a un phénomène qui fait intervenir deux périodes distinctes; par exemple, on peut considérer les courbes (épicycloïdes) obtenues en faisant rouler un cercle sur un autre cercle (voir les équations explicites en annexe).

Si le rapport des rayons est rationnel, on obtient une courbe finie; c'est ce qui se passe si l'on a un engrenage, comme dans le cas bien connu du spirographe. Sinon, on obtient une courbe qui est dense dans une couronne (voir figure 3.4).

On obtient aussi le même genre de dessin en programmant une tortue pour tracer un segment, tourner d'un angle α et recommencer: le résultat est un polygone régulier (qui peut être étoilé, comme dans le dessin) ou une courbe dense dans une couronne (voir les formules en annexe).

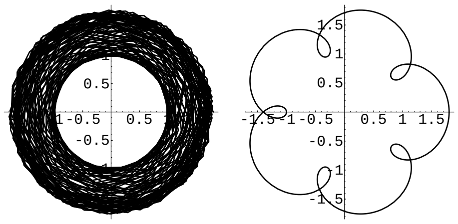


FIG. 3.4 – *Une épicycloïde irrationnelle et une épicycloïde rationnelle*

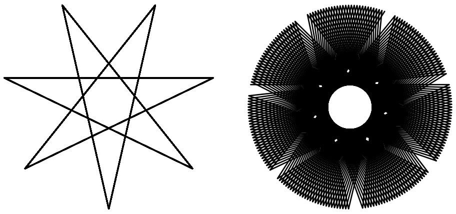


FIG. 3.5 – *deux dessins à la tortue*

3.5 Codage de la rotation et entropie

Une manière de mieux comprendre une application sur un ensemble est de la coder dans une partition. Ainsi, dans le cours précédent sur la multiplication par ϕ, nous avons vu que le développement en base ϕ d'un point x n'est rien d'autre que le souvenir de l'emplacement des images successives de x sous l'action de la ϕ-expansion R_ϕ. Nous allons faire le même travail pour l'addition du nombre d'or.

De même que nous avons essayé de repérer les orbites de la ϕ-expansion par rapport à deux intervalles, I_0 et I_1, on peut essayer de repérer les orbites de la rotation par rapport à deux intervalles; il est naturel de prendre les deux intervalles de continuité de la rotation, que nous avons appelé $J_1 = [0, 1/\phi^2[$ et $J_0 = [1/\phi^2, 1[$.

Remarque. Il paraîtrait plus naturel de placer au début l'intervalle J_0, mais il est préférable de donner le numéro 0 à l'intervalle le plus grand, pour rester cohérent avec le cours précédent. On aurait pu, comme on le verra ci-dessous, obtenir les deux à la fois en étudiant l'application réciproque de R_ϕ, $R_\phi^{-1} = R_{\frac{1}{\phi^2}}$.

On peut ainsi, comme on l'a fait dans le dernier cours, définir les itinéraires de points du système pour une rotation. Partant d'un point x de $[0, 1[$, on retient la lettre J_0 ou J_1 suivant l'intervalle auquel appartient x. On code ensuite l'emplacement des itérés $R_\phi(x)$, $R_\phi^2(x)$, etc...

Donnons une définition formelle.

Définition 3.9 *On note ν l'application: $[0, 1[\to \{0, 1\}$ qui à x associe le nombre $i = \nu(x)$ tel que $x \in J_i$. On appelle itinéraire de x par rapport à la rotation R_ϕ la suite de terme général $u_n = \nu(R_\phi^n(x))$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in [0, 1[, \quad u_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ R_\phi^n(x) \in J_0 = [\frac{1}{\phi^2}, 1[, \\ 1 & si\ R_\phi^n(x) \in J_1 = [0, \frac{1}{\phi^2}[. \end{cases}$$

Une illustration est donnée figure 3.6. Le point x se situe dans l'intervalle J_0. Son image $R_\phi(x)$ (lue en ordonnée sur le graphe puis transposée en abscisse via la diagonale) appartient par contre à J_1. Les images successives donnent des points qui appartiennent à J_0, à nouveau J_0, puis J_1, J_0, J_0, J_1 etc... Le codage du point x commence donc par les lettres 01001001.

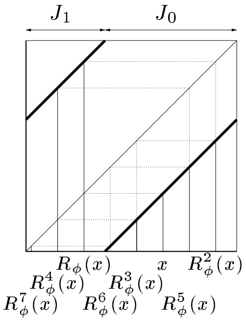


FIG. 3.6 – *Exemple de codage :* $u_0(x) \dots u_7(x) = 01001001$.

On peut donner une formule arithmétique explicite pour l'itinéraire d'un point.

Proposition 3.10 *L'itinéraire du point x est la suite u défnie par:*

$$u_n = 1 + [x + \frac{n}{\phi}] - [x + \frac{n+1}{\phi}].$$

Preuve: Remarquons d'abord que, pour un élément y de $[0, 1[$, $y \in J_0$ si et seulement si $y + \frac{1}{\phi} > 1$, c'est-à-dire si $[y + \frac{1}{\phi}] = [y] + 1$; on peut donc écrire $\nu(y) = 1 + [y] - [y + \frac{1}{\phi}]$.

De plus, cette formule est encore valable si l'on décale y d'un entier, car cela ne change pas la différence des parties entières.

Mais on sait que $R_\phi^n(x) = \{x + \frac{n}{\phi}\}$, donc la formule s'en déduit en posant $y = \{x + \frac{n}{\phi}\}$. ∎

Si l'on veut mesurer le degré de désordre de l'application R_ϕ, il est intéressant de calculer le nombre d'itinéraires possibles. Le théorème suivant dit qu'il est très petit.

Théorème 3.11 *Le nombre d'itinéraires de longueur n possibles pour la rotation R_ϕ par rapport à la partition $\{J_0, J_1\}$ est égal à $n + 1$.*

Preuve: On pourrait donner de ce résultat une preuve calculatoire, en utilisant la formule que nous venons de donner. Il est plus agréable de donner une preuve géométrique, qui est résumée dans la figure 3.7.

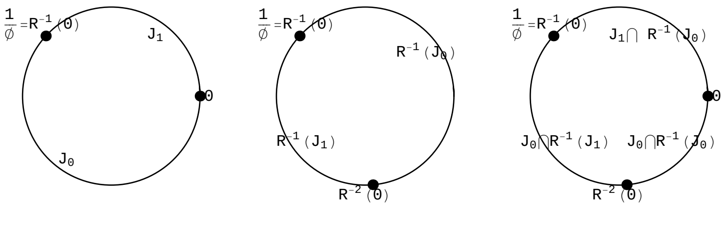


FIG. 3.7 – *les trois itinéraires de longueur 2*

la valeur $\nu(x)$ nous dit dans lequel des deux intervalles J_0, J_1 découpés sur le cercle par les points 0 et $R_\phi^{-1}(0)$ se trouve x.

Et la valeur $\nu(R_\phi(x))$? elle nous dit dans lequel des deux intervalles J_0, J_1 se trouve $R_\phi(x)$. Ceci revient exactement à nous dire dans lequel des deux intervalles $R_\phi^{-1}(J_0), R_\phi^{-1}(J_1)$ se trouve x. Or, ces deux intervalles sont séparés sur le cercle par les points $R_\phi^{-1}(0)$ et $R_\phi^{-2}(0)$ (Attention à bien travailler sur le cercle: si on travaille sur l'intervalle $[0,1[$ au lieu du cercle, les choses sont moins symétriques: l'un de ces intervalles est découpé en deux morceaux).

L'itinéraire de longueur 2 nous dit ainsi où se trouve le point x par rapport à tous ces intervalles à la fois, c'est-à-dire par rapport à la partition découpée sur le cercle par les 3 points 0, $R_\phi^{-1}(0)$, et $R_\phi^{-2}(0)$; mais cela fait 3 intervalles, donc il y a 3 itinéraires possibles, 00, 01 et 10.

On étend ce raisonnement à l'ordre n: la valeur $\nu(R_\phi^n(x))$ nous dit dans lequel des deux intervalles $R_\phi^{-n}(J_0), R_\phi^{-n}(J_1)$ se trouve x, et ces deux intervalles sont séparés sur le cercle par les points $R_\phi^{-n}(0)$ et $R_\phi^{-n+1}(0)$.

Si l'on veut donc compter les itinéraires de longueur n, on considère l'orbite $x, R_\phi(x), \ldots, R_\phi^{n-1}(x)$, ce qui revient à placer x par rapport aux $n+1$ points $0, R_\phi^{-1}(0), \ldots, R_\phi^{-n}(0)$. Mais ces $n+1$ point découpent le cercle en $n+1$ intervalles, donc il y a exactement $n+1$ itinéraires de longueur n possibles. ∎

On en déduit que cette rotation n'est pas un système chaotique:

Théorème 3.12 *L'entropie de la rotation R_ϕ est nulle.*

Preuve: Il suffit d'appliquer la définition: l'entropie est égale à $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n} = 0$.

En toute rigueur, il faudrait pour conclure montrer que deux points distincts ne peuvent pas avoir le même itinéraire, ce que nous laissons au lecteur (il suffit d'utiliser la minimalité du système, qui prouve que l'orbite d'un point passe aussi près que l'on veut des bornes des deux intervalles).
∎

3.6 Phénomène de repétition au sein de l'application

Tout ce que l'on a fait jusqu'ici n'utilise que l'irrationalité de ϕ, et serait vrai pour n'importe quel nombre irrationnel α. On peut s'attendre à ce que la rotation R_ϕ possède des propriétés particulières, à cause de la nature spéciale de ϕ, et c'est bien le cas: elle est *auto-induite* sur son grand intervalle de continuité.

On s'intéresse à la restriction de la rotation par le nombre d'or R_ϕ au grand intervalle de continuité $J_0 = [\frac{1}{\phi^2}, 1[$. Cet intervalle n'est pas stable par R_ϕ, dans la mesure où

$$R_\phi([\frac{1}{\phi^2}, 1[) = [0, \frac{1}{\phi}[\not\subset [\frac{1}{\phi^2}, 1[.$$

Induit de la rotation sur le grand intervalle de continuité On appelle *induit de la rotation sur* $[\frac{1}{\phi^2}, 1[$, noté S_ϕ, l'application de premier retour de R_ϕ sur l'intervalle J_0:

$$\forall x \in J_0 = [\frac{1}{\phi^2}, 1[,\ S_\phi(x) = R_\phi^n(x) \text{ où } n = \min\{k > 0; R_\phi^k(x) \in J_0\}.$$

On calcule explicitement S_ϕ comme suit.

Proposition 3.13

$$\left\{\begin{array}{ll} S_\phi(x) = x + \frac{1}{\phi^3} & si\ x \in [\frac{1}{\phi^2}, \frac{2}{\phi^2}[, \\ S_\phi(x) = x - \frac{1}{\phi^2} & si\ x \in [\frac{2}{\phi^2}, 1[. \end{array}\right.$$

Preuve: La représentation de $\mathbb{R}_\phi$ et S_ϕ donnée figure 3.8 fait ressortir naturellement une partition de J_0 en deux intervalles:

$$J_0 = K_a \cup K_b, \text{ avec } K_a = [\frac{1}{\phi^2}, \frac{2}{\phi^2}[, \quad K_b = [\frac{2}{\phi^2}, 1[.$$

Il suffit alors de calculer les images successives de K_a par la rotation par le nombre d'or pour montrer que S_ϕ est égal à R_ϕ^2 sur cet intervalle:

- $K_a = [\frac{1}{\phi^2}, \frac{2}{\phi^2}[\subset J_0$,
- Puisque $R_\phi(x) = x - \frac{1}{\phi^2}$ pour $\frac{1}{\phi^2} \leq x < \frac{2}{\phi^2}$, l'image de K_a n'est pas incluse dans J_0:

$$R_\phi(K_a) = [0, \frac{1}{\phi^2}[\not\subset J_0,$$

- Par contre, $\mathbb{R}_\phi(x) = x + \frac{1}{\phi}$ pour $0 \leq x < \frac{1}{\phi^2}$, et donc

$$R_\phi^2(K_a) = [\frac{1}{\phi}, 1[\subset J_0.$$

On a ainsi montré que $n(x) = 2$ pour tout $x \in K_a$, et en particulier $S_\phi(x) = R_\phi^2(x) = x + \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} = x + \frac{1}{\phi^3}$ sur K_a.

De même, on sait que $K_b = [\frac{2}{\phi^2}, 1[\subset J_0$. On calcule $R_\phi(x) = x - \frac{1}{\phi^2}$ sur K_b, ce qui implique

$$R_\phi(K_b) = [\frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi}[\subset J_0.$$

En particulier, S_ϕ est égal à R_ϕ sur K_b, c'est-à-dire à la rotation par $-\frac{1}{\phi^2}$. ∎

Où on retrouve la rotation par le nombre d'or dans son induit Une représentation de l'application induite est donnée au côté d'une représentation de l'addition Figure 3.8. On notera en particulier que les deux fonctions se ressemblent. Visuellement, si on effectue sur la représentation de R_ϕ une rotation d'angle π suivie d'une homothétie de rapport ϕ, on obtient exactement la représentation de S_ϕ.

La relation exacte entre ces deux propriétés est la suivante.

Théorème 3.14 *L'addition par le nombre d'or est* topologiquement conjuguée *à son induit sur son plus grand intervalle de continuité: en effet, l'application définie de* $[0, 1[$ *dans* J_0 *par* $h(x) = 1 - \frac{x}{\phi}$ *est continue, inversible, d'inverse continue, et vérifie la relation de commutation:*

$$S_\phi = h^{-1} R_\phi h.$$

Autrement dit,

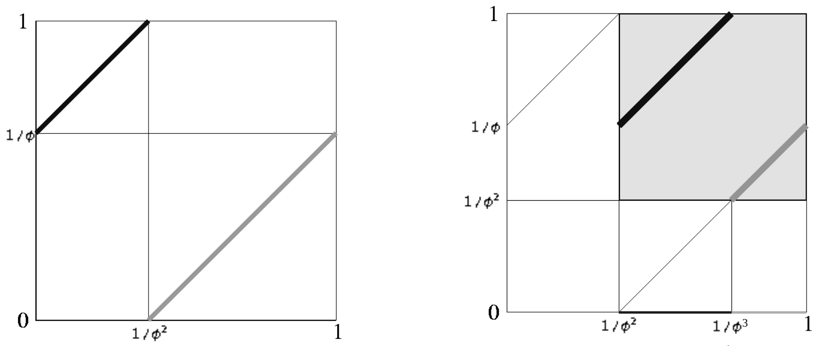
$$\forall x \in [0, 1[, \quad S_\phi(1 - \frac{x}{\phi}) = 1 - \frac{R_\phi(x)}{\phi}.$$

Remarque. La relation de commutation a un sens très fort: elle dit que l'application S_ϕ est identique à l'application R_ϕ, à un changement de coordonnées près; en particulier, ces deux applications ont les mêmes propriétés dynamiques. Le changement de coordonnées est h; il combine un changement d'origine (translation), un changement d'échelle (homothétie de rapport $\frac{1}{\phi}$: S_ϕ est une version “miniaturisée” de R_ϕ) et un changement d'orientation (à cause du signe $-$, qui complique bien les choses). On verra plus tard que ce changement d'orientation est lié au déterminant -1 de l'application linéaire de Fibonacci.

Preuve: L'application h est linéaire donc continue. On vérifie que la fonction τ définie sur $[\frac{1}{\phi^2}, 1[$ par $\tau(x) = \phi(1-x)$ est à valeur sur $[0,1[$ et est l'inverse de h, continu.

Pour prouver le théorème, il suffit donc de vérifier que la relation $S_\phi\, h = h\, S_\phi$ est vraie sur les deux intervalles J_0 et J_1. Ainsi, puisque $h(\frac{1}{\phi^2}) = 1 - \frac{1}{\phi^3} = 1 - (\frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2}) = \frac{2}{\phi^2}$, on a $h(J_0) = h([\frac{1}{\phi^2}, 1[) = [\frac{1}{\phi^2}, \frac{2}{\phi^2}[= K_a$. Selon la Proposition 3.13, on en déduit que pour tout $x \in J_0$, $S_\phi(h(x)) = h(x) + \frac{1}{\phi^3}$. Puisque $R_\phi(x) = x - \frac{1}{\phi^2}$ sur J_0, on a bien $1 - \frac{R_\phi(x)}{\phi} = 1 - \frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi^3} = S_\phi(h(x))$.

De même, $h(J_1) = [\frac{2}{\phi^2}, 1[= K_b$ et pour tout $x \in J_1$, $S_\phi(h(x)) = h(x) - \frac{1}{\phi^2}$ tandis que $R_\phi(x) = x + \frac{1}{\phi}$ d'où $1 - \frac{R_\phi(x)}{\phi} = 1 - \frac{x}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} = S_\phi(h(x))$. ■



Addition du nombre d'or — Induit sur $J_0 = [\frac{1}{\phi^2}, 1[$

FIG. 3.8 – *L'addition par le nombre d'or et son induit sont égales à une miniaturisation près.*

Auto-induction Le théorème précédent signifie que l'addition du nombre d'or est une application qui se contient elle-même. On dit qu'elle est *auto-induite* ou *auto-similaire.*

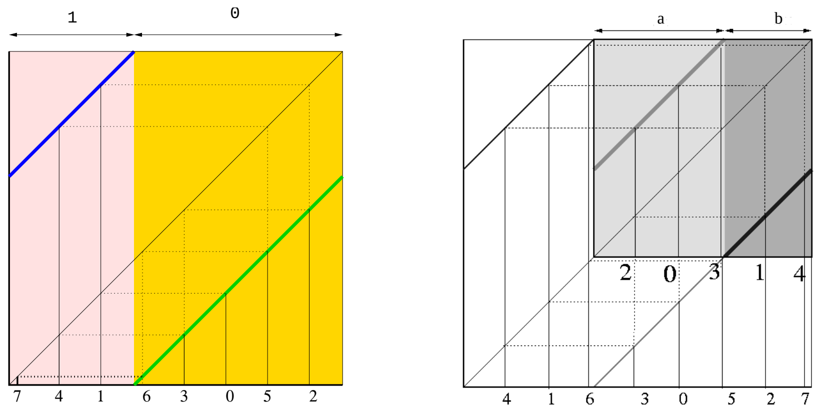
3.7 Codage de l'application induite

Codage de l'induit S_ϕ Puisque l'application est auto-induite, il est aussi intéressant de définir un codage sur J_0 relativement à l'application induite S_ϕ, en fonction de ses intervalles de continuité. Ainsi, pour tout $x \in [1 - \frac{1}{\phi}, 1[$, on note $(v_n(x))_{n\geq 0}$, le codage de la trajectoire de x par S_ϕ dans la partition donnée par les intervalles de continuité de S_ϕ : $K_a = [1 - \frac{1}{\phi}, 2 - 2\frac{1}{\phi}[$, et $K_b = [2 - 2\frac{1}{\phi}, 1[$.

$$\forall x \in [1 - \frac{1}{\phi}, 1[, \quad v_n(x) = \begin{cases} a & \text{si } S_\phi^n(x) \in K_a = [1 - \frac{1}{\phi}, 2 - \frac{2}{\phi}[, \\ b & \text{si } S_\phi^n(x) \in K_b = [2 - \frac{2}{\phi}, 1[. \end{cases}$$

Exemple L'intérêt de l'existence de ces deux codages est que l'on peut maintenant comparer le codage d'un point x de J_0 en fonction des deux application. Considérons l'exemple donné figure 3.9 du point $\frac{1}{\phi}$ mod 1 (désigné par 0 dans chaque image). Ce point appartient au grand intervalle J_0. Puis $R_\phi(\frac{1}{\phi})$ (désigné par 1 sur la figure) appartient à J_1, tandis que $R_\phi^2(\frac{1}{\phi}) \in J_0$, etc. Ainsi, le codage par la rotation par le nombre d'or commence par 01001010. Notons que ce codage obtenu visuellement peut parfaitement être obtenu numériquement en calculant les images successives de $\frac{1}{\phi}$ et en les comparant à la valeur de discontinuité $\frac{1}{\phi^2}$.

De même, on peut calculer le codage selon l'induit S_ϕ. En utilisant la représentation graphique de cette application, on trouve que le codage commence par *abaab*. Cependant, nous allons voir que le codage selon l'induit $v_n(x)$ est très fortement lié au codage par la rotation $u_n(x)$.



Codage selon la rotation R_ϕ
01001010.

Codage selon l'induit S_ϕ
abaab

FIG. 3.9 – *Codages de $\frac{1}{\phi}$ selon deux applications*

Relation entre les deux codages Formellement, la définition de S_ϕ comme induit de R_ϕ implique que les intervalles J_0, J_1, K_a et K_b sont reliés comme suit.

Lemme 3.15 *Pour tout $x \in K_a$, on a*
- $x \in J_0$,
- $R_\phi(x) \in J_1$
- $P_{J_1}(x) = R_\phi^2(x)$.

Pour tout $x \in K_b$ on a
- $x \in J_0$,
- $R_\phi(x) = P_{J_1}(x)$.

Preuve: Par définition, $K_a = [\frac{1}{\phi^2}, 2\frac{2}{\phi^2}[\subset [\frac{1}{\phi^2}, 1[= J_0$, ce qui prouve le premier point. Cependant, on sait que sur l'ensemble J_0, R_ϕ est égal à la rotation par $-\frac{1}{\phi^2}$, ce qui implique $R_\phi(K_a) = [0, \frac{1}{\phi^2}[= J_1$ qui est disjoint de J_0. Enfin, $R_\phi^2(K_a) = [\frac{1}{\phi}, 1[\subset J_0$ ce qui prouve le troisième point.

Les relations concernant K_b se prouvent de manière identique. ∎

En particulier, coder un point x par K_a selon l'induit P_{J_1} implique que x passera par J_0 puis J_1 sous l'action de la rotation R_ϕ. En fait, le codage $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est entièrement déterminé par le codage $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 3.16 *Pour tout* $x \in J_0 = [\frac{1}{\phi^2}, 1[$, *le codage* $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *de* x *selon la rotation par le nombre d'or s'obtient en remplacant successivement chaque lettre de* $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *par la transformation des deux lettres* a *et* b *suivante:*

$$\sigma(a) = 01; \quad \sigma(b) = 0.$$

Ainsi

$$u_0(x)u_1(x)\dots u_n(x)\dots = \sigma(v_0(x))\sigma(v_1(x))\dots\sigma(v_n(x))\dots$$

Preuve: Par définition de l'application induite S_ϕ, pour tout entier k, il existe un entier $n(k)$ tel que $S_\phi^k(x) = R_\phi^{n(k)}(x)$. Le lemme précédent s'interprète directement comme suit:

- si $v_k(x) = a$, alors $S_\phi^k(x) = R_\phi^{n(k)}(x) \in J_0$ ce qui implique $u_{n(k)} = 0$. De plus $R_\phi^{n(k)+1}(x) \in J_1$, c'est-à-dire $u_{n(k)+1} = 1$. Enfin, $R_\phi^{n(k)+2}(x) \in J_0$ ce qui implique $n(k+1) = n(k) + 2$.
- si $v_k(x) = b$, alors $u_{n(k)} = 0$ et $n(k+1) = n(k) + 1$.

On montre ainsi par récurrence que pour entier k,

$$u_0(x)u_1(x)\dots u_{n(k)}(x) = \sigma(v_0(x))\sigma(v_1(x))\dots\sigma(v_n(x)).$$

■

Exemple Pour les deux exemples donnés figures 3.6 et 3.9, on remarquera graphiquement que cette relation est bien vérifiée:

$$0100100 = \sigma(a)\sigma(b)\sigma(a)\sigma(b).$$

3.8 Substitution

Substitution La règle de transformation introduite au théorème 3.16 est appelée *substitution de Fibonacci* lorsqu'on identifie a avec 0, b avec 1:

$$\sigma(0) = 01; \quad \sigma(1) = 0.$$

Elle est définie comme agissant sur une lettre 0 ou 1. On peut la faire agir sur des mots finis composés de 0 ou 1, voire infinis, par concaténation, c'est-à-dire en juxtaposant les images des lettres une à une: $\sigma(a_1 \dots a_n \dots) = \sigma(a_1)\dots\sigma(a_n)\dots$.

Point fixe de la substitution Une propriété fondamentale de cette substitution est que l'image de la lettre 0 commence par 0. On peut ainsi calculer les images successives de a:

0
01
010
01001
01001010
0100101001010
010010100100101001001

On constate que tous ces mots commencent les uns par les autres.

Lemme 3.17 *Les mots $\sigma^k(0)$ pour $k \geq 0$ commencent successivement les uns par les autres. Ils sont de longueur F_{k+1} où F_k désigne la suite de Fibonacci.*

Preuve: Puisque $\sigma(0) = 01$, on a $\sigma^{k+1}(0) = \sigma^k(01) = \sigma^k(0)\sigma^k(1)$ et les mots commencent les uns par les autres. De plus, on peut aussi écrire $\sigma^{k+2}(0) = \sigma^{k+1}(0)\sigma^{k+1}(1) = \sigma^{k+1}(0)\sigma^k(0)$ puisque $\sigma(1) = 0$. Ainsi, les longueurs de ces mots suivent la relation de Fibonacci, et les deux premiers mots 0 et 01 sont de longueur 1 et 2, ce qui implique que $\sigma^k(0)$ est de longueur F_{k+1} pour tout $k \geq 0$. ∎

A l'infini, on obtient une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est fixée par la substutitution.

Proposition 3.18 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que u_n est la n-ième lettre de tous les $\sigma^k(0)$ qui sont de longueur au moins n existe et est un point fixe de la substitution de Fibonacci:*

$$u_0 u_1 \dots u_n \dots = \sigma(u_0)\sigma(u_1)\dots\sigma(u_n)\dots$$

Il s'agit de la seule suite infinie commencant par 0 qui vérifie cette propriété.

Preuve: La suite est bien définie puisque les longueurs des $\sigma^k(0)$ tendent vers l'infini. De plus, pour tout rang n, u_n est la n-ième lettre d'un mot $\sigma^k(0)$, mais aussi de $\sigma^{k+1}(0)$, c'est-à-dire la n-ième lettre de $\sigma(u)$. Le mot infini u est donc fixé par la substitution σ.

L'unicité découle du fait que si une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point fixe et commence par 0, alors elle commence aussi par tous les $\sigma^k(0)$ est ne peut que être égale à u. ∎

On trouve ainsi une autre suite de Fibonacci, qui n'est plus numérique mais symbolique:

Définition 3.19 *Par abus de langage, on appelle suite (substitutive) de Fibonacci l'unique point fixe de la substitution de Fibonacci $0 \mapsto 01$ $1 \mapsto 0$; cette suite commence par*

$$0100101001001010010100100101\dots$$

Un point intéressant est de reconnaître ce point fixe parmi les codages de points pour la rotation par le nombre d'or. Nous allons pour celà utiliser la propriété d'auto-induction qui a été montrée au début de ce cours.

Théorème 3.20 *Le codage du point $\frac{1}{\phi}$ pour la rotation par le nombre d'or et son codage pour l'appliction induite S_ϕ sont tous les deux égaux au point fixe de la substitution de Fibonacci.*

Preuve: Du fait de la définition des intervalles de codage, la relation d'auto-induction $S_\phi(1 - \frac{x}{\phi}) = 1 - \frac{R_\phi(x)}{\phi}$ se traduit sur les codages u et v où a est identifié avec 0 et b avec 1 par

$$\forall x \in [0, 1[,\ \forall n \geq 0,\ v_n(1 - \frac{x}{\phi}) = u_n(x).$$

Un cas particulier se produit lorsque $x = 1 - \frac{x}{\phi}$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{\phi}$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_0(\tfrac{1}{\phi})u_1(\tfrac{1}{\phi})\dots u_n(\tfrac{1}{\phi})\dots &= \sigma(v_0(\tfrac{1}{\phi}))\sigma(v_1(\tfrac{1}{\phi}))\dots\sigma(v_n(\tfrac{1}{\phi}))\dots \\ &= \sigma(u_0(\tfrac{1}{\phi}))\sigma(u_1(\tfrac{1}{\phi}))\dots\sigma(u_n(\tfrac{1}{\phi}))\dots \end{aligned}$$

Autrement dit, le codage $(u_n(\frac{1}{\phi}))_{n\geq 0}$ est le point fixe commencant par 0 de la substitution de Fibonacci.

$$u_0(\frac{1}{\phi})u_1(\frac{1}{\phi})\dots u_n(\frac{1}{\phi})\dots = 0100101001001010010100\dots$$

■

On montre, mais nous ne pourrons aborder cette preuve ici, que la rotation par le nombre d'or est entièrement décrite par la substitution de Fibonacci, au sens où le codage de chaque point est entièrement déterminé à partir du point fixe de la substitution. L'intérêt d'une telle représentation par des suites symboliques est de permettre une meilleure approche des propriétés de la transformation de départ telle que ses points périodiques ou son entropie.

Théorème 3.21 *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ est le codage de la trajectoire d'un élément de $[0,1[$ sous l'action de la rotation par le nombre d'or, dans la partition $[0,\frac{1}{\phi^2}[\cup[\frac{1}{\phi^2},1[$ si et seulement*

- *pour tout n, $u_0u_1\dots u_n$ apparaît dans le point fixe de la substitution de Fibonacci $0\mapsto 01$, $1\mapsto 0$.*
- *il n'existe aucun entier k tel que $u_k=0$ et $(u_{n+k+1})_{n\geq 0}$ est le point fixe de la substitution de Fibonacci.*

Il existe alors un unique point $x\in[0,1[$ dont la trajectoire est codée par $(u_n)_{n\geq 0}$.

Preuve: On obtient facilement à partir du codage de $\frac{1}{\phi}$ le codage des points $\frac{k}{\phi}$ mod 1 pour $k>0$:

$$\forall k>0,\ \forall n\geq 0,\ u_n(\frac{k}{\phi} \bmod 1)=u_{n+k-1}(\frac{1}{\phi}).$$

Selon le théorème 3.6 vu plus haut, les points $\frac{k}{\phi}$ mod 1 sont denses dans $[0,1[$. De plus, le codage est constant localement sur $[0,1[\setminus\{1-\frac{1}{\phi}\}$: dans un petit intervalle autour de chaque point, l'image (c'est à dire le nom de l'intervalle) reste constante.

On en déduit que pour tout $x\in[0,1[$ et pour tout entier n_0, il existe k tels que

$$\forall n\leq n_0,\ u_n(x)=u_{n+k}(\frac{1}{\phi} \bmod 1).$$

La réciproque n'est pas tout à fait exacte dans la mesure où il existe des suites (u_n) qui vérifient la formule précédente et ne sont pas des codages de la forme $(u_n(x))$. Par exemple, on se convaincra que la suite définie par $u_0=0$ et $u_n=u_{n-1}(\frac{1}{\phi})$ pour tout $n>0$, ne peut coder la trajectoire d'un point sous l'action de la rotation par le nombre d'or dans la partition choisie. En fait, la suite (u_n) code l'action de 0 dans la partition ouverte à gauche $]0,\frac{1}{\phi^2}]\cup]\frac{1}{\phi^2},1]$. On montre que ce type de situation est le seul obstacle à la réciproque recherchée. Cette preuve est trop longue pour être abordée ici. ■

3.9 Annexe

3.9.1 Les rotations sont d'orbites denses ou périodiques

Lemme 3.22 *Tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est discret ou dense.*

Preuve: Soit H un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à 0, et posons $a = \inf\{x \in H | x > 0\}$. Alors, si $a = 0$, H contient des éléments aussi petit que l'on veut, et on peut donc approcher tout élément de $\mathbb{R}$ par un élément de H; si $a > 0$, on montre facilement que $H = a\mathbb{Z}$, et donc H est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$.

■

Preuve du Théorème 3.6. Remarquons d'abord que l'orbite d'un point x se déduit de l'orbite de 0 par une translation de x; il suffit donc d'étudier l'orbite du point 0, l'orbite de tous les autres points est du même type.

Mais l'orbite du point 0 est un sous-groupe de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le sous-groupe $\{n\alpha | n \in \mathbb{Z}\}$. Or le lemme implique que tout sous-groupe de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est fini ou dense.

Plus précisément, ce sous groupe de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est l'image, par la projection canonique, du sous groupe $\{n\alpha + p | n, p \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{R}$. Ce dernier est discret si α est rationnel, et dans ce cas son image est finie, et sinon il est dense, donc son image, l'orbite de 0, est dense dans le cercle.

3.9.2 Expression de la rotation dans l'expansion en base $\overline{\phi}$

On a vu que la rotation R_ϕ était auto-induite sur un intervalle ϕ fois plus petit, avec un changement d'orientation, ce qui correspond à une multiplication par $\overline{\phi}$. Il est donc raisonnable de supposer que la rotation R_ϕ s'exprimera de façon assez simple si l'on considère le développement en base $\overline{\phi}$. On peut effectivement trouver une expression particulièrement explicite de l'application inverse R_ϕ^{-1}. Il faut pour cela quelques lemmes, que nous laissons au lecteur le soin de prouver:

Lemme 3.23 *Tout réel contenu dans l'intervalle $[-\frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi}]$ s'écrit d'au plus deux façons sous la forme $\sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n \overline{\phi}^n$, où ϵ est une suite de 0 et 1 qui ne contient pas deux 1 de suite. L'intervalle $[-\frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi^3}]$ correspond à $\epsilon_2 = 0$, et l'intervalle $[\frac{1}{\phi^3}, \frac{1}{\phi}]$ à $\epsilon_2 = 1$.*

Remarque. L'étude des développements doubles est plus complexe que dans le cas précédent: par exemple, $\frac{1}{\phi^3}$ possède deux développements ultimement périodiques,

$$0,0100101010101\ldots \text{ et } 0,000101010101\ldots$$

On pourrait, mais ce serait plus délicat, donner une condition assurant la périodicité.

L'application R_ϕ^{-1} correspond à la rotation d'angle $\frac{1}{\phi^2} = \overline{\phi}^2$ modulo 1. Plus précisément, sur l'intervalle $[-\frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi^3}]$ on ajoute $\overline{\phi}^2$; sur l'intervalle $[\frac{1}{\phi^3}, \frac{1}{\phi}]$ on ajoute $\overline{\phi}^2 - 1 = \overline{\phi}$.

Il y a donc deux cas à considérer: si $\epsilon_2 = 0$, on additionne $\overline{\phi}^2$, c'est-à-dire que l'on remplace ϵ_2 par 1, puis l'on normalise si nécessaire, en utilisant la propriété $\overline{\phi}^n + \overline{\phi}^{n+1} = \overline{\phi}^{n+2}$ autant de fois que nécessaire.

Si $\epsilon_2 = 1$, on ajoute $\overline{\phi}$, puis on normalise en utilisant $\overline{\phi} + \overline{\phi}^2 = \overline{\phi}^3$ et en réitérant autant de fois que nécessaire.

Dans les deux cas, les retenues s'arrêtent dès que l'on trouve deux 0 consécutifs; les seuls cas où se pose un problème sont pour les deux développements strictement périodiques $0,0\overline{10} = \frac{1}{\phi}$ et $0,00\overline{10} = -\frac{1}{\phi^2}$, bornes de l'intervalle, qui ont tous deux pour image 0.

On obtient ainsi une opération que nous avons déjà vue: il s'agit, pour les développements finis, de l'addition de 1 dans la base de Zeckendorff...

Chapitre 4

Géométrie des substitutions

On voudrait étudier de plus près la suite substitutive de Fibonacci; mais il n'est pas très facile de distinguer des propriétés caractéristiques sur une telle suite de 0 et de 1...

$$0100101001001010010100100101\dots$$

On peut quand même remarquer des choses directement: il n'y a jamais deux 1 à la suite, et il n'y a jamais plus de deux 0 à la suite; cette suite est composée de 1 séparés par un ou deux 0. Peut-on en dire plus?

4.1 Géométrie de la suite symbolique de Fibonacci

Escalier de Fibonacci Une façon de visualiser cette suite est de la considérer comme un chemin dans le plan: on part de l'origine, et pour chaque 0 on fait un pas vers la droite, pour chaque 1 un pas vers le haut. On obtient ainsi une sorte d'escalier irrégulier, dont le début est représenté sur la figure 4.1.

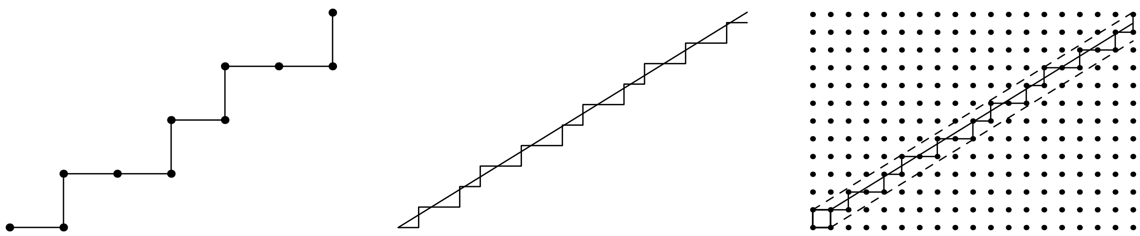


FIG. 4.1 – *l'escalier de Fibonacci, la droite correspondante et sa fenêtre*

Quelques constatations visuelles Sur la figure de gauche, avec une dizaine de points, il est difficile de repérer des régularités significatives; mais si on trace plus de points, comme dans la figure centrale, on voit mieux ce qui se passe: l'escalier approxime de très près une droite, la droite de pente $\frac{1}{\phi}$ passant pas l'origine.

Si l'on trace tous les points entiers, on s'aperçoit même que cet escalier est, en un sens précis, la meilleure approximation possible de la droite: comme on le voit sur la figure de droite, les points entiers pas lesquels passent l'escalier sont exactement les points entiers contenus dans la bande limitée par les deux droites $y = \frac{x}{\phi} - 1$ et $y = \frac{x}{\phi} + \frac{1}{\phi}$.

Cette bande a une définition intuitive simple: c'est celle qu'on obtient en faisant glisser le carré unité qui a l'origine comme coin supérieur gauche le long de la droite passant par l'origine de pente $\frac{1}{\phi}$, comme on le voit sur la figure de droite.

On vient de faire des constatations expérimentales sur des dessins, qui permettent de faire des conjectures; il serait évidemment préférable, pour des mathématiciens, de les prouver...

Formalisation des questions Il faut d'abord préciser un peu nos conjectures.

Définition 4.1 *On note B la bande du plan définie par* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \le y - \frac{x}{\phi} < \frac{1}{\phi}\}$.

Nous nous intéressons aux points entiers contenus dans cette bande.

Lemme 4.2 *Pour tout entier n fixé dans $\mathbb{Z}$, parmi les couples d'entiers (p, q) tels que $p + q = n$, il en existe exactement 1 qui est contenu dans B. En particulier, il existe pour tout n un unique point P_n tel que*

$$B \cap \mathbb{Z}^2 = \{P_n = (x_n, y_n),\ n \in \mathbb{Z}\}, \qquad x_n + y_n = n.$$

Preuve: Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ et $x + y = n$. Alors, $(x, y) \in B$ si et seulement si $y - \frac{n-y}{\phi} \in [-1, \frac{1}{\phi}[$, c'est à dire $y \in [-1 + \frac{n+1}{\phi^2}, \frac{n+1}{\phi^2}[$. Le nombre y est donc le seul entier qui appartient à cet intervalle de longueur 1. ■

Posons $\mathbf{e}_0 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_1 = (0, 1)$ les deux vecteurs de la base canonique.

Lemme 4.3 *Si* $-\frac{1}{\phi^2} \le y_n - \frac{x_n}{\phi} < \frac{1}{\phi}$, *alors* $P_{n+1} = P_n + \mathbf{e}_0$. *On dira que P_n est de type 0.*
Si $-1 < y_n - \frac{x_n}{\phi} < -\frac{1}{\phi^2}$, *alors* $P_{n+1} = P_n + \mathbf{e}_1$. *On dira que P_n est de type 1.*

Preuve: Il suffit de faire le calcul pour voir que, sous les conditions données, $P_n + \mathbf{e}_0$ (resp. $P_n + \mathbf{e}_1$) satisfait aux inégalités qui définissent B; c'est donc le point P_{n+1}. ■

Ce que nous voulons prouver, c'est que la suite des types des points sélectionnés par la bande B, en partant de l'origine, est la suite substitutive de Fibonacci (ce qui montrera que l'escalier que nous avons défini plus haut passe par ces points).

En fait, on voit que la seule chose qui compte, c'est la quantité $y - \frac{x}{\phi}$; elle a une signification géométrique:

Définition 4.4 *On note π la projection sur l'axe vertical parallèlement à la droite $y = \frac{x}{\phi}$, c'est-à-dire* $\pi(x, y) = y - \frac{x}{\phi}$.

La bande B est projetée par π sur l'intervalle $[-1, \frac{1}{\phi}[$. Appelons f l'application de cet intervalle dans lui-même définie par

$$\begin{array}{rcl} f:\ \pi(B) = [-1, \frac{1}{\phi}[& \mapsto & [-1, \frac{1}{\phi}[\\ x & \to & x + 1 \text{ si } x < -\frac{1}{\phi^2} \\ & & x - \frac{1}{\phi} \text{ sinon.} \end{array}$$

On peut réécrire les lemmes précédents sous la forme suivante.

Proposition 4.5 *On a* $\pi(P_{n+1}) = f(\pi(P_n))$.

Preuve: Si P_n est de type 0, c'est à dire si $\pi(P_n) \geq -\frac{1}{\phi^2}$, on a $\pi(P_{n+1}) = \pi(P_n) + \pi(\mathbf{e}_0) = \pi(P_n) - \frac{1}{\phi} = f(\pi(P_n))$. Si P_n est de type 1, c'est à dire si $\pi(P_n) < -\frac{1}{\phi^2}$, on a $\pi(P_{n+1}) = \pi(P_n) + \pi(\mathbf{e}_1 = \pi(P_n) + 1 = f(\pi(P_n))$. ■

Cependant, nous connaissons bien l'application f: c'est un échange de deux intervalles, dont le second est ϕ fois plus grand que le premier; à un changement de coordonnées près, c'est l'application R_ϕ. Plus précisément, on a le résultat suivant, que l'on vérifie immédiatement par le calcul.

Proposition 4.6 *On note h l'application affine définie par $h(t) = \phi t - 1$ de $[0, 1[$ sur $[-1, \frac{1}{\phi}[$. On a $R_\phi = h^{-1} \circ f \circ h$.*

Mais ceci nous donne le résultat cherché.

Théorème 4.7 *La suite des types des points entiers selectionnés par la bande B est la suite substitutive de Fibonacci.*

Preuve: En effet, cette suite est donnée comme on l'a vu par l'itinéraire du point 0 sous l'action de l'application f, par rapport aux deux intervalles $[-1, \frac{-1}{\phi^2}[$ et $[\frac{-1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi}[$; par conjugaison, c'est aussi l'itinéraire de $\frac{1}{\phi}$ sous l'action de R_ϕ, pour les deux intervalles J_0 et J_1. Mais on a vu que cet itinéraire est la suite substitutive de Fibonacci. ■

Autres escaliers Nous n'avons regardé que l'itinéraire d'un point particulier; peut-on trouver l'itinéraire d'un point quelconque, de façon géométrique? la réponse est positive: on peut montrer que l'itinéraire du point $t \in [0, 1[$ sous l'action de la rotation R_ϕ s'obtient en décalant verticalement la bande B de $-h(t)$; on sélectionne ainsi un autre escalier, et la suite des types des points est l'itinéraire de t. On laisse au lecteur le soin d'expliciter la preuve.

4.2 lien avec la ϕ-expansion

Pouvons-nous trouver des rapports avec le cours précédent? Y-a-t'il des relation entre la rotation R_ϕ et la ϕ-expansion? Oui, et on peut les voir de diverses façons, en particulier sur le dessin de l'escalier.

Action de la matrice de Fibonacci Tout d'abord, on peut voir géométriquement l'action de la substitution. On a vu que, dans l'escalier, un point de type 1 est toujours précédé d'un point de type 0; on peut supprimer ce point de type 1, on obtient alors un escalier dont les marches sont horizontales ou obliques (en regroupant un segment vertical et le segment horizontal qui le précède).

On a représenté le résultat sur la figure ci-dessous; l'escalier initial est en pointillé, le nouveau représenté par un trait continu. Il y a bien des choses à remarquer, la plus importante étant que le nouvel escalier est image de l'ancien par l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que nous avons déjà rencontrée; le codage du nouvel escalier est donc le même que le codage de l'ancien, et ce nouvel escalier est sélectionné par une bande plus petite.

On retrouve donc l'automorphisme linéaire associé à Fibonacci.

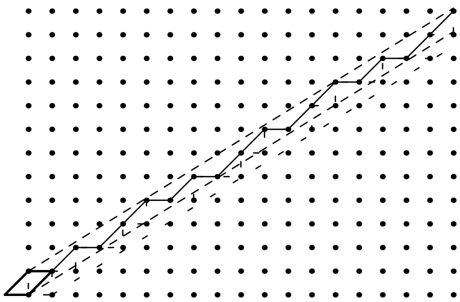


FIG. 4.2 – *l'escalier désubstitué*

Projection sur direction propre contractante : rotation par le nombre d'or Nous venons de voir dans la section précédente qu'en projettant l'escalier sur la deuxième direction propre, on retrouve la rotation, qui est comme on le montre dans l'annexe du cours 3 reliée au développement en base $\overline{\phi}$.

Projection sur direction propre dilatante : pavage de la droite et développement en base de Fibonacci Et si, au lieu de projeter sur la deuxième direction propre parallèlement à la première, on faisait le contraire? Si l'on projetait l'escalier sur la droite? On obtient un découpage de la droite par deux sortes d'intervalles, comme on le voit sur la figure 4.3; un petit calcul montre que le rapport entre les deux longueurs est ϕ.

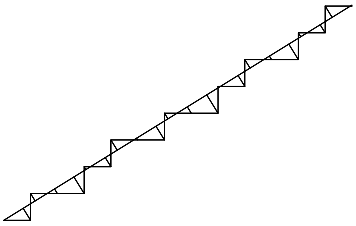


FIG. 4.3 – *le quasi-cristal*

Nous avons déjà vu cette figure: c'est le pavage de la droite donné par l'expansion en base ϕ que nous avons vu à la fin du cours 2, correspondant au découpage de la droite réelle en fonction des parties entières dans la numération du nombre d'or. On comprend maintenant mieux sa combinatoire: elle est donnée par la substitution de Fibonacci.

Quasi-cristaux C'est l'exemple le plus simple de ce qu'on appelle un quasi-cristal; un cristal, en physique, est un pavage périodique de l'espace; en une dimension, c'est un découpage de la droite par un motif périodique (en pratique, le découpage donné par les points entiers). La structure que nous avons ici n'est pas périodique, mais elle est très proche de l'être: tout motif fini qui apparaît dans le pavage apparaît une infinité de fois, et revient toujours au bout d'un temps borné. Par exemple, le motif 0101 apparaît dans ce pavage, et on peut prouver que toute suite de 11 termes contient ce motif.

En dimension 2 ou 3, on peut obtenir des quasi-cristaux plus esthétiques, les plus connus étant ceux associés au pavage de Penrose. Ces objets, crés au départ pour des raisons purement mathématiques, sont apparus en physique quelques années plus tard, quand on a trouvé un alliage qui cristallise avec une symétrie d'ordre 5, ce qui est impossible pour un vrai cristal.

Ces quasi-cristaux ont des propriétés physique très particulières, qui les ont fait par exemple employer comme revètement de poèles à frire, leur résistance mécanique étant bien supérieure aux révètements bien connus en téflon.

FIG. 4.4 – *Un quasi-cristal pratique*

4.3 Substitutions

La substitution de Fibonacci entre dans le cadre d'une classe d'objets combinatoires qui se définit comme suit.

Définition 4.8 *Une* substitution *est une règle qui remplace chaque lettre d'un alphabet fini de taille d, et désigné par* $\{1, 2, \ldots, d\}$*, par un mot fini non vide.*

Remarque. On supposera toujours, pour simplifier, que l'image de 1 commence par 1 et est de longueur au moins 2.

On étend naturellement sa définition à l'ensemble des mots finis et infinis sur d lettres par concaténation, c'est-à-dire en juxtaposant les images des lettres une à une: $\sigma(a_1 \ldots a_n \ldots) = \sigma(a_1) \ldots \sigma(a_n) \ldots$.

Point fixe Puisque l'image de 1 par une substitution commence par 1 et est de longueur au moins 2, on peut comme pour la substitution de Fibonacci itérer σ sur la lettre 1 et obtenir un point fixe pour la substitution.

Proposition 4.9 *Les mots finis* $\sigma^n(1)$ *commencent les uns par les autres. Leur longueur tend vers l'infini. Le mot infini u qui commence par tous les* $\sigma^n(1)$ *est un point fixe de la substitution, c'est-à-dire* $\sigma(u) = u$*.*

Preuve: On écrit $\sigma(1) = 1V$, où V est un mot fini non vide. Ainsi, $\sigma^{n+1}(1) = \sigma^n(1)\sigma^n(V)$. En particulier, $\sigma^{n+1}(1)$ commence par $\sigma^n(1)$ et sa longueur est strictement plus grande que celle de $\sigma^n(1)$.

Puisque la longueur des mots $\sigma^n(1)$ tend vers l'infini, il existe un unique mot infini u qui commence par tous les $\sigma^n(1)$. De plus, son image commence par les $\sigma^{n+1}(1)$, et ne peut par unicité n'être égale qu'à u. ■

Exemple sur trois lettres Le point fixe s'obtient comme pour la substitution de Fibonacci en itérant successivement l'image d'une lettre qui commence par cette même lettre. Par exemple, une substitution intéressante est donnée par

$$\sigma(1) = 12 \quad \sigma(2) = 13 \quad \sigma(3) = 1.$$

On peut calculer rapidement le début de son point fixe.

1
12
1213
1213121
1213121121312
121312112131212131211213
12131211213121213121121312131211213121213121

Croissance des mots Une question naturelle concernant les substitutions est la composition de l'image d'une lettre ou d'un mot. Ainsi, combien de 1 va contenir $\sigma^3(1)$, si σ est la substitution de l'exemple précédent. Puisque $\sigma^3(1) = \sigma^2(12)$. Il faut donc connaître la composition de $\sigma^2(1)$ et $\sigma^2(1)$. Mais $\sigma^2(1) = \sigma(12) = \sigma(1)\sigma(2)$ qui contient deux 1, tandis que $\sigma^2(2) = \sigma(1)\sigma(3)$ qui contient aussi deux 1, ce qui permet de répondre à la question de départ : $\sigma^3(1)$ contient quatre 1. Cependant, ce raisonnement n'est pas satisfaisant car trop long.

On peut le formaliser en associant à tout mot fini U un vecteur qui décrit sa composition en lettres

$$\mathbf{l}(U) = (\text{nombre de } 1 \text{ dans } U, \ \ldots\ , \text{ nombre de } d \text{ dans } U) \in \mathbb{Z}^d.$$

Une substitution est alors décrite par une matrice de taille d qui décrit la composition de toutes les lettres: la **matrice d'une substitution** σ, notée $\mathbf{M} = (m_{i,j})_{i,j\leq d}$, a pour colonnes les vecteurs $\mathbf{l}(\sigma(1)), \ldots, \mathbf{l}(\sigma(d))$, c'est-à-dire

$$m_{i,j} = \text{nombre de } i \text{ dans } \sigma(j).$$

Il devient alors aisé de calculer la composition de l'image d'un mot.

Proposition 4.10 *Pour tout mot fini U, on a*

$$\mathbf{l}(\sigma(U)) = \mathbf{M}\mathbf{l}(U).$$

Preuve: On fixe une lettre i. Pour compter le nombre de i dans $\sigma(U)$, il faut compter le nombre de i dans l'image de chaque lettre qui apparait dans U. Or, pour toute lettre j, U contient $\mathbf{l}(U)_j$ fois la lettre j, et $\sigma(j)$ contient $m_{i,j}$ fois la lettre i. Finalement, $\sigma(U)$ contient $\sum_{j\leq d} m_{i,j}\mathbf{l}(U)_j$ fois la lettre i, ce qui est bien le i-ème terme de $\mathbf{Ml}(U)$. ■

Exemple Pour la substitution introduite plus haut $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(1)$ contient un 1 et un 2, la première colonne est donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. La seconde colonne est $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ puisque le mot $\sigma(2)$ contient un 1 et un 3. Finalement, la matrice est

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

En particulier, on obtient facilement la composition de $\sigma^3(1)$: il s'agit de la première colonne de $\mathbf{M}^3$.

Un peu d'algèbre linéaire On peut introduire le polynome caractéristique d'une matrice est défini comme étant un déterminant, mais, sur des exemples de petite taille, on le retrouve avec un simple système d'équations linéaires. Ainsi, pour une substitution sur 3 lettres, on écrit un système de 3 équations à 3 inconnues x, y, z et un paramètre λ à partir de la matrice de la substitution: pour chaque équation du système, on fixe une lettre i et on regarde la composition de $\sigma(i)$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} m_{1,1}x + m_{1,2}y + m_{1,3}z & = & \lambda\, x \\ m_{2,1}x + m_{2,2}y + m_{2,3}z & = & \lambda\, y \\ m_{3,1}x + m_{3,2}y + m_{3,3}z & = & \lambda\, z \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Puisque ce système possède 3 équations et 3 inconnues, il peut parfois admettre des solutions non nulles. Le **polynome caractéristique** de ce système est un polynome $P_\sigma(\lambda)$ de degré 3 qui caractérise les nombres λ non nuls pour lesquels le système admet une solution où x, y et z ne sont pas tous nuls. Les racines de ce polynomes sont les **valeurs propres de la substitution**. Les solutions non nulles (x, y, z) sont les **vecteurs propres de la substitution**. Les **vecteurs propres transposés de la substitution** sont les solutions du système pour lesquels les coefficients ont été symétrisés:

$$\left\{\begin{array}{lcl} m_{1,1}x + m_{2,1}y + m_{3,1}z & = & \lambda\, x \\ m_{1,2}x + m_{2,2}y + m_{3,2}z & = & \lambda\, y \\ m_{1,3}x + m_{2,3}y + m_{3,3}z & = & \lambda\, z \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Concrètement, pour déterminer ces valeurs, on écrit le système et on le réduit par la méthode du Pivot de Gauss à une équation du type $P(\lambda)x_d = 0$.

Exemple Le système de la substitution $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(1)$ est le suivant:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y + z & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \\ y & = & \lambda z \end{array}\right.$$

Ce système se réduit facilement en

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda y \\ y & = & \lambda z \\ (\lambda^2 + \lambda + 1)z & = & \lambda^3 z \end{array}\right.$$

Ainsi, ce système admet une solution non nulle en (x, y, z), qui est de la forme $z(\lambda^2, \lambda, 1)$ si et seulement si λ vérifie l'équation polynomiale suivante

$$\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Les valeurs caractéristiques de σ sont donc les racines de ce polynome de degré 3, qui généralise la condition de Fibonacci $\phi^2 = \phi + 1$. On appelle **nombres de Tribonacci** les racines de $\lambda^3 =$

$\lambda^2 + \lambda + 1$. La substitution $\sigma(1) = 12 \quad \sigma(2) = 13\sigma(3) = 1$ est quand à elle appelée **substitution de Tribonacci**.

Le système transposé est donné par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + y &=& \lambda x \\ x + z &=& \lambda y \\ x &=& \lambda z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& \lambda z \\ y &=& (\lambda - 1)x \\ z &=& (\lambda^2 - \lambda - 1)x \end{array} \right.$$

Si $\lambda = 0$, la seule solution de ce système est nulle. Sinon, ce système admet une solution non nulle lorsque $z = \lambda^{-1}x = (\lambda^2 - \lambda - 1)x$ soit la relation de Tribonacci $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1)$. Les vecteurs propres transposés sont alors $z(\lambda, \lambda - 1, 1)$.

Taux de croissance Le polynome caractéristique d'une substitution permet de connaître le taux de croissance de la taille des images successives d'une lettre ou d'un mot.

Théorème 4.11 *Si une puissance de la matrice a tous les coefficients strictement positifs, pour tout mot fini U, le rapport des longueurs $\frac{\sigma^{n+1}(U)}{\sigma^n(U)}$ tend vers la plus grande racine en module du polynome caractéristique de la substitution.*

Preuve: La preuve de ce résultat fait appel à de l'algèbre linéaire. Les grandes étapes consistent à décomposer le vecteur U dans une base de vecteurs caractéristiques. Puisqu'une puissance de la matrice a tous ses coefficients positifs, la composante de U selon un vecteur dominant sera non nulle. On montre alors en utilisant la relation $\mathbf{l}(\sigma(U)) = \mathbf{Ml}(U)$ que $(\sigma^n(U)$ est équivalent à λ^n, où λ est la plus grande valeur propre. ■

Exemple

Proposition 4.12 *Le polynome caractéristique de la substitution de Tribonacci $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$ admet deux racines complexes conjuguées de module inférieur 1 et une racine réelle plus grande que 1.*

Preuve: On étudie la fonction polynome associée $f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$. Sa dérivée est $3\lambda^2 - 2\lambda - 1$, dont le discriminant est 16. Une étude précise de la fonction montre qu'elle est croissante, puis décroissante et à nouveau croissante. Cependant, elle ne croise qu'une fois 0 (dans la première partie croissante). En particulier, le polynome admet une seule racine réelle. Puisque $f(2) > 0$ et $f(1) < 0$, cette racine est comprise entre 0 et 1. Les deux autres racines sont complexes conjuguées. Puisque le produit des trois racines vaut 1 (coefficient constant du polynome), le module des racines complexes est inférieur à 1. ■

Ainsi, les mots $\sigma^n(1)$ croissent à peut près comme λ^n, où λ est l'unique racine de $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$, dont on peut calculer une approximation $\lambda \simeq= 1,83$.

4.4 Un exemple de quasi-cristal: fractals de Rauzy

Escalier associé à un point périodique Etant donné une substitution sur 3 lettres 1, 2, 3, on va représenter, comme dans le cas de la suite de Fibonacci, n'importe lequel de ses points périodiques par un escalier dans $\mathbb{R}^3$ remplaçant chaque lettre par le vecteur canonique de $\mathbb{R}^3$ associé. On note $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Si $u_0u_1 \dots u_n \dots$ est un point périodique de la substitution, on note $\mathcal{E}(u)$ l'escalier suivant.

$$\mathcal{E}(u) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathbf{e}_{u_0} + \dots + \mathbf{e}_{u_{n-1}} \right) + \{\lambda \mathbf{e}_{u_n},\ \lambda \in [0,1[\}\,.$$

Fractal de Rauzy Nous avons vu pour la substitution de Fibonacci que l'escalier associé à son point fixe reste proche d'une direction particulière. Il s'avère qu'une classe substitution vérifie cette propriété dès que ses valeurs propres sont telle que toutes sauf une sont de module inférieur à un.

Définition 4.13 *Une substitution est dite* représentable *si son polynome caractéristique admet* ± 1 *pour coefficient dominant, une racine de module strictement supérieur à 1, et toutes ses autres racines non nulles et de module strictement inférieur à 1.*

On montre que l'escalier associé à un point périodique d'une substitution représentable reste à distance bornée de la direction donnée par le vecteur propre associé à sa plus grande valeur propre, qui sera appelé **vecteur propre dominant**. Le résultat exact est le suivant.

Théorème 4.14 *Soit* $u_0 u_1 \ldots u_n \ldots$ *un point périodique pour une substitution représentable. Soit* π *la projection parallèlement à la direction dominante, sur le plan orthogonal à n'importe quel vecteur propre transposé dominant. Alors la projection par* π *des sommets de l'escalier associé au point périodique est un ensemble borné appelé fractal de Rauzy de la substitution:*

$$\mathcal{R} = \left\{ \pi \left(\sum_{i \geq n} \mathbf{e}_{u_i} \right), \quad n \geq 0 \right\}.$$

De plus, si on choisit une couleur pour chaque lettre de l'alphabet, on peut colorier chaque point du fractal de Rauzy $\pi(\sum_{i \geq n} \mathbf{e}_{u_i})$ de la couleur choisie pour la lettre u_n. On obtient alors des figures avec 3 couleurs.

Nous ne démontrerons pas ce résultat, mais nous donnerons plus tard une méthode pour construire manuellement ce fractal de Rauzy.

Exemple de la substitution de Tribonacci La substitution de Tribonacci est bien représentable dans la mesure où nous avons vu précédemment que son polynome vérifie la définition 4.13. Si ψ désigne le nombre réel de Tribonacci (c'est-à-dire l'unique réel tel que $\psi^3 = \psi^2 + \psi + 1$), un vecteur propre dominant est donné par $(\psi^2, \psi, 1)$.

Lemme 4.15 *La projection sur le plan orthogonal à un vecteur* (a, b, c) *parallèlement à un vecteur* (A, B, C) *est définie par* $\pi(x, y, z) = (x - A\frac{ax+by+cz}{aA+bB+cC}, y - B\frac{ax+by+cz}{aA+bB+cC}, z - C\frac{ax+by+cz}{aA+bB+cC})$.

Preuve: La projection $(X, Y, Z) = \pi(x, y, z)$ est l'unique vecteur tel que $aX + bY + cZ = 0$ et $(X, Y, Z) - (x, y, z)$ est colinéaire à (A, B, C). Ainsi, il existe t tel que $(X, Y, Z) - (x, y, z) = t(A, B, C)$. En utilisation la relation $aX + bY + cZ = 0$, on obtient $t = \frac{ax+by+cz}{aA+bB+cC}$. ∎

On obtient ainsi la figure donnée figure 4.5.

Construction explicite du fractal Selon le lemme précédent, et du fait de la définition du fractal de Rauzy, on obtient cette figure pour une substitution sur 3 lettres selon la méthode suivante.

1. Choisir une couleur pour chaque lettre.
2. Calculer le polynome caractéristique de la substitution en appliquant la méthode du Pivot au système associé à la substitution.

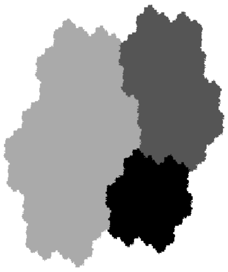


FIG. 4.5 – *Le fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci*

3. Montrer que ce polynome est bien le polynome d'une substitution représentable (vérifier que son terme constant est ± 1 et qu'il n'admet qu'une racine réelle ou complexe de module supérieur à 1).
4. Déterminer un vecteur propre dominant $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ en résolvant le système linéaire de la substitution pour la plus grande valeur propre.
5. Calculer trois vecteurs de translation à partir de $\pi(\mathbf{e_1})$, $\pi(\mathbf{e_2})$ et $\pi(\mathbf{e_3})$.
$$\mathbf{v_1} = (1, 0) \quad \mathbf{v_2} = (0, 1) \quad \mathbf{v_3} = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_3}, -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}).$$
6. Calculer le point fixe $u_0 u_1 \dots u_n \dots$ de la substitution en itérant les images de 1.
7. Partir de 0 et lire les lettres $u_0 u_1 \dots u_n \dots$ une à une. Pour chaque lettre u_k lue, avant du vecteur $\mathbf{v_{u_k}}$ correspondant et tracer un point de la couleur associée à la lettre u_k.

Ainsi, pour la substitution de Tribonacci, on obtient les dessins suivants aux différentes étapes. On remarquera que le fractal de Rauzy ainsi obtenu est légèrement différent de celui présenté Figure 4.5. En fait, les deux fractals sont la projection du même escalier, mais sur deux plans différents. Ils sont égaux à une transformation géométrique près.

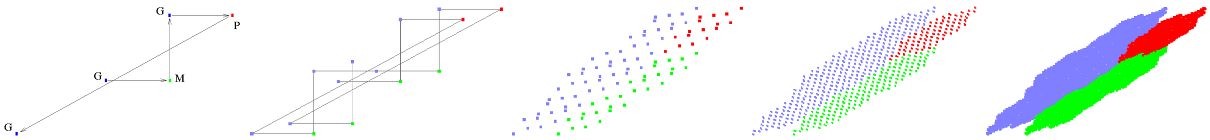
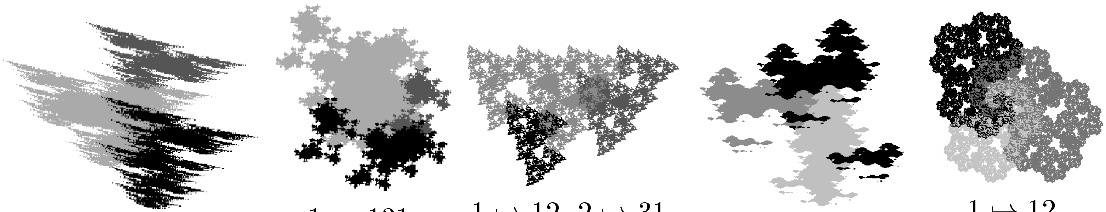


FIG. 4.6 – *Fractal de Rauzy: projections de différents débuts de l'escalier de Tribonacci dans le plan horizontal*

Autres exemples de fractals Les figures que l'on peut obtenir sont de formes diverses. Nous en donnons ici quelques exemples typiques: des figures semblables au tapis de Serpinski, des nuages flous, des fractals séparés en une infinités de morceaux bien disjoints, on peut obtenir bien des figures. Pour chacune, les trois couleurs différentes s'intersectent sur un ensemble dont la mesure est nulle (même si celà semble peu visible pour certaines).

4.5 Catalogue des propriétés (passionnantes) des fractals de Rauzy

Nous allons finir ce cours en décrivant les propriétés des fractals de Rauzy. Il est hélas impossible de donner une preuve de tous ces résultats dans ce cours. Nous allons donc essayer de terminer en



$1 \mapsto 123,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 31$ — $1 \mapsto 131,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 1132$ — $1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 31,\ 3 \mapsto 1$ — $1 \mapsto 11223,\ 2 \mapsto 123,\ 3 \mapsto 2$ — $1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 23,\ 3 \mapsto 312$

FIG. 4.7 – *Différents fractals de Rauzy*

illustrant ces propriétés. Il faudra nous faire confiance pour leur démonstration...

Décomposition du fractal de Rauzy en pièces disjointes Au sein de la définition du fractal de Rauzy, on distingue trois parties en fonction des lettres associées à chaque sommet de l'escalier que nous projetons. Pour toute lettre a, on définit le morceau $\mathcal{R}_a = \left\{ \pi \left(\sum_{i \geq n} \mathbf{e}_{u_i} \right),\ u_i = a,\ n \geq 0 \right\}$.

Par construction, les morceaux du fractal de Rauzy recouvrent ce fractal. Une propriété fondamentale du fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci est que **ces morceaux s'intersectent sur un ensemble dont l'aire est nulle.**

Cette propriété est en fait assez générale. Concrètement, toutes les substitutions représentables qui ont été testées à ce jour (et un très grand nombre ont été testées) vérifient cette propriété. Cependant, il est frustrant de constater qu'on ne parvient pas à montrer que cette propriété est vraie en général sans avoir à la tester pour chaque exemple.

Autosimilarité La substitution se retrouve géométriquement par la notion de répétition. Ainsi, si on regarde attentivement le fractal de Rauzy de la substitution de Tribonacci, on constatera que la grande pièce est une copie rétrécie et tournée vers la gauche du fractal de Rauzy total. La pièce moyenne est une copie de la grande pièce à la même similitude près. La petite pièce est une copie de la moyenne modulo cette similitude.

En fait, le résultat exact est que les pièces du fractal de Rauzy vérifie une équation d'autosimilarité, au sens où on peut prendre le système d'équation associé à la substitution et remplacer les inconnues par les pièces translatées.

Plus précisément, si α est une racine complexe du polynome de Tribonacci et h_α la similitude d'équation $z \to \alpha z$, il existe des vecteurs $\mathbf{v}_{i,j}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_\alpha \mathcal{R}_1 & = & (\mathcal{R}_1 + \mathbf{v}_{1,1}) + (\mathcal{R}_2 + \mathbf{v}_{1,2}) + (\mathcal{R}_3 + \mathbf{v}_{1,3}) \\ h_\alpha \mathcal{R}_2 & = & \mathcal{R}_1 + \mathbf{v}_{2,1} \\ h_\alpha \mathcal{R}_3 & = & \mathcal{R}_2 + \mathbf{v}_{3,1} \end{array} \right.$$

Cette propriété est toujours vraie: **toute pièce $\mathcal{R}_i$ du fractal de Rauzy contient exactement $m_{i,j}$ copies de l'image de la pièce $\mathcal{R}_j$ sous l'action d'une tranformation géométrique contractante.** On dit que cette figure est autosimilaire. En particulier, sa frontière est fractale, d'où son nom de fractal de Rauzy.

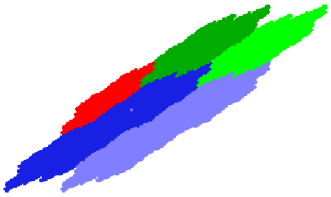


FIG. 4.8 – *Fractal de Rauzy: projections de différents débuts de l'escalier de Tribonacci dans le plan horizontal*

Echange de pièces au sein du fractal Sur la ligne brisée, on se déplace de sommet en sommet en utilisant les trois vecteurs canoniques. En particulier, on peut translater chaque cylindre par le projeté du vecteur canonique correspondant, tout en restant dans $\mathcal{R}$. Ceci définit un échange de morceaux représenté à la Figure 4.9: on peut déplacer la grosse pièce vers la droite, la moyenne en bas à gauche et la petite en haut à droite sans modifier la figure.

Cet échange de morceaux est l'équivalent de l'échange d'intervalle codé par la substitution de Fibonacci. Ainsi, si on code la trajectoire des points du fractal de Rauzy pour cette transformation, on retrouve des suites symboliques de 0 et 1 liées au point fixe de la substitution de Tribonacci.

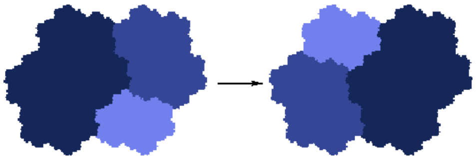


FIG. 4.9 – *fractal de Rauzy : translation par morceaux.*

Développement en base de Tribonacci A partir de la relation $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$, on peut définir sur le fractal de Rauzy d'une substitution un développement en base α, où α est une des deux racines complexes du polynome de Tribonacci : tout point du fractal de Rauzy préalablement plongé dans le plan complexe $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme d'une série de terme général α, dont les coefficients sont une suite quelconque de 0 et de 1 qui ne contient pas trois 1 consécutifs.

$$\mathcal{R} = \{\sum_{i \geq 0} \varepsilon_i \, \alpha^i;\ \varepsilon_i = 0, 1;\ \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0\} \subset \mathbb{C}$$

On obtient ici l'équivalent de la numération en base $\overline{\psi}$ pour le nombre d'or évoqué au long des cours précédents.

Pavages Enfin, une des propriétés des fractals de Rauzy et non des moindre, est qu'il peut être déplacé régulièrement de manière à paver complètement le plan sans laisser de trou et de sorte que les pièces ne se recouvrent pas. Plus précisément, deux types de pavages sont associés au fractal de Rauzy; l'un est totalement périodique : les pièces sont placées de manière régulière. Le second pavage n'est pas périodique mais contient une certaine forme de régularité : il est identique quelque soit l'échelle à laquelle on regarde ce pavage. Ce pavage apériodique fait du fractal de Rauzy un quasi-cristal au même titre que l'intervalle et la partition de la droite réelle donnée par la numération de Fibonacci.

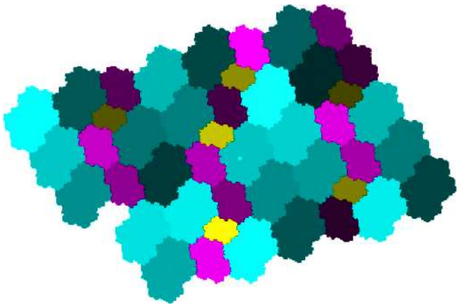
Tribonacci substitution

$1 \mapsto 11223,\ 2 \mapsto 123,\ 3 \mapsto 2$

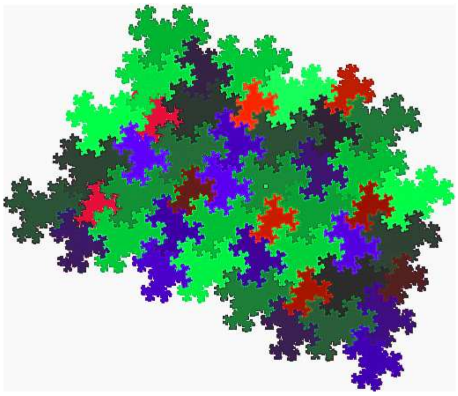
$1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 31,\ 3 \mapsto 1$

$1 \mapsto 12,\ 2 \mapsto 23,\ 3 \mapsto 312$

FIG. 4.10 – *fractals de Rauzy : pavages périodiques associés.*



Tribonacci substitution



$1 \mapsto 11223,\ 2 \mapsto 123,\ 3 \mapsto 2$

FIG. 4.11 – *fractals de Rauzy : pavages apériodiques associés.*

4.6 un autre exemple amusant

On a montré que tout nombre complexe peut se développer en base λ, où λ est une racine complexe de $X^3 - X^2 - X - 1$. Il existe un autre exemple intéressant:

Théorème 4.16 *Tout nombre complexe peut se développer en base $1+i$; plus précisément, pour tout nombre complexe z, on peut trouver une suite (ϵ_n), à valeur dans $\{0,1\}$, telle que l'on ait:*

$$z = \pm \sum_{n=n_0}^{\infty} \epsilon_n (1+i)^{-n}$$

Il s'agit donc d'une généralisation aux complexes du développement binaire. Il est bien sûr intéressant de regarder l'intervalle unité: il s'agit d'un sous-ensemble du plan tout à fait esthétique, qu'on appelle le "dragon jumeau" (ou "twindragon"), car il se décompose en deux parties qui lui sont homothétique dans un rapport $\sqrt{2}$ (voir figure 4.12).

Ce dragon pave le plan par translation par $\mathbb{Z}[i]$, comme on le voit dans la Figure 4.12.

Une autre sorte de dragon qui lui est relié peut être produit par un procédé particulièrement simple: on prend une feuille de papier, que l'on plie n fois dans la même direction, puis que l'on déplie à angle droit. On obtient alors une suite de courbes que l'on peut voir dans la Figure 4.14

Cette figure peut être produite par une substitution très simple, sur 4 lettres:

$$1 \to 12 \quad 2 \to 32 \quad 3 \to 34 \quad 4 \to 14$$

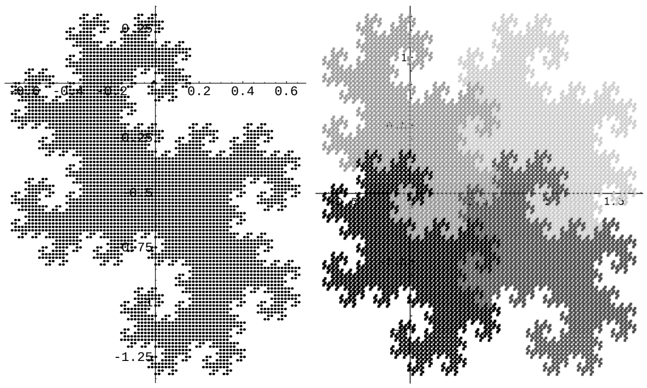


FIG. 4.12 – *le dragon jumeau et le pavage associé*

FIG. 4.13 – *le dragon jumeau pave le plan*

on prend le mot fixe, et on associe à 1 un déplacement de 1 dans le plan, à 2 un déplacement de $-i$, à 3 un déplacement de -1 et à 4 un déplacement de i.

On voit qu'une forme se dégage: c'est ce qu'on appelle le dragon de Heighway (du nom de son découvreur, en 1960), qu'on peut admirer Figure 4.15.

Ce dragon pave le plan de façon non périodique; il est associé à un développement curieux en base $1+i$.

C'est ce dessin qui ouvre les chapitres du roman "jurassic park" (pages 23,47,113,231,345,401,459 de l'édition de poche).

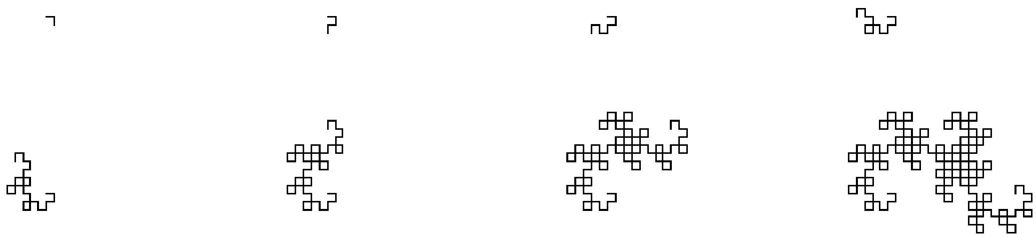


FIG. 4.14 – *Papiers pliés*

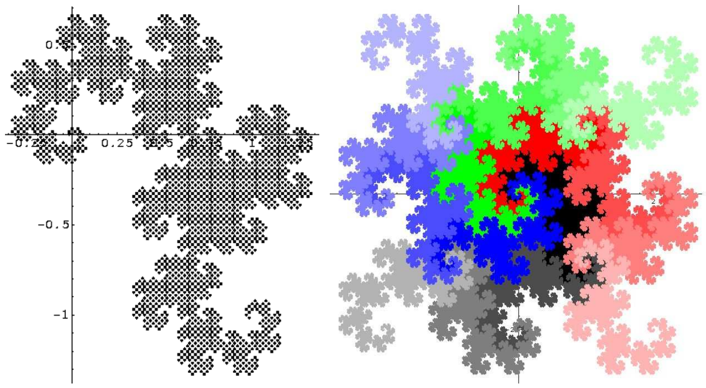


FIG. 4.15 – *Le dragon de Heighway et son pavage apériodique*