Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 1–

Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive

par Vincent CANTERINI et Anne SIEGEL

Résumé. On explicite une conjugaison en mesure entre le décalage sur le système dynamique associé à une substitution primitive et une transformation adique sur le support d'un sous-shift de type fini, à savoir l'ensemble des chemins d'un automate dit des préfixes-suffixes. En caractérisant les préimages par la conjugaison des chemins périodiques de l'automate, on montre que cette conjugaison est injective sauf sur un ensemble dénombrable, sur lequel elle est finie-à-un. On en déduit l'existence d'une suite de partitions du système qui est génératrice en mesure et une application aux fractals de Rauzy est donnée.

Abstract. We prove that a dynamical system Ω arising from a primitive substitution is measurably conjugate to an adic transformation on a subshift of finite type defined as the set of paths on a graph. The conjugation map is one-to-one except on the orbit of periodic points of Ω, on which it is finite-to-one. We deduce a sequence of partitions of Ω which is is generating in measure. An application to Rauzy fractals is given.

0. Introduction

Soit σ une substitution sur un alphabet fini. On obtient un système dynamique symbolique en considérant l'opérateur de décalage S sur l'ensemble Ω des mots dont le langage est inclus dans l'ensemble des facteurs des itérés de σ sur les lettres de l'alphabet. Notre objectif est de décrire de manière plus explicite ce système dynamique lorsqu'il est minimal et de mettre en évidence la dynamique de la numération associée à cette substitution.

De nombreux auteurs se sont intéressés à ces questions (E. Coven et M. Keane [2], J. Martin [14], M. Dekking [3] entre autres). En 1882, G. Rauzy a introduit un automate des préfixes. Cette notion lui a permis en particulier de décrire précisément la dynamique du système associé à la substitution $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$ et d'en déduire que ce système est conjugué en mesure à une rotation sur un tore (voir [18]).

Manuscrit reçu le 15 octobre 1999.

Dans [19], l'auteur annonce que l'automate des préfixes permet de décrire de manière semblable toute la classe des substitutions primitives de type Pisot. Les travaux de B. Mossé [15] sur la reconnaissabilité des substitutions impliquent que cette affirmation est incorrecte en toute généralité. Notre but est de mettre en place un véritable outil pour décrire les systèmes substitutifs minimaux, en nous inspirant de la méthode proposée par G. Rauzy.

Plus précisément, si tous les éléments du système unilatéral (Ω, S) admettent une décomposition unique sous la forme $w = s\sigma(v)$, où s est le suffixe de l'image $\sigma(b)$ d'une lettre b telle que $bv \in \Omega$, alors l'application $w \mapsto v$ apparaît comme l'opération inverse de la substitution. Une telle opération se trouve aussi dans les travaux de J. Martin [14] et bien d'autres mais elle est généralement définie de manière incomplète. Dans cet article, la notion précédente est remplacée par celle de *désubstitution* qui permet de décrire la dynamique du décalage sur Ω.

On considère non pas, comme le font la plupart des auteurs, le système symbolique unilatéral associé à une substitution, mais le système bilatéral, où les suites sont indexées par $\mathbb{Z}$. La projection canonique du système bilatéral sur le système unilatéral est alors injective sauf sur un ensemble fini de points où les fibres sont finies.

Les résultats de [15] impliquent que tout mot du système bilatéral est l'image par σ, éventuellement décalée un petit nombre de fois, d'un unique autre mot de Ω. Autrement dit, tout mot w de Ω peut-être découpé de manière unique sous la forme suivante :

$$w = \ldots \mid \underbrace{\ldots}_{\sigma(v_{-1})} \mid \underbrace{w_{-k}\ldots w_{-1}.w_0\ldots w_l}_{\sigma(v_0)} \mid \underbrace{\ldots}_{\sigma(v_1)} \mid \underbrace{\ldots}_{\sigma(v_2)} \mid \ldots$$

le mot $v = \ldots v_{-n} \ldots v_{-1}v_0v_1 \ldots v_n \ldots$ appartenant à Ω. On appelle *désubstitution* l'application θ qui à w associe le mot v. A cette désubstitution est naturellement associée la partition de Ω suivant le découpage de $\sigma(v_0)$ sous la forme $w_{-k}\ldots w_{-1} \mid w_0 \mid w_1 \ldots w_l$, c'est-à-dire selon les ensembles suivants où $[a]$ désigne l'ensemble des mots du système dont la lettre d'indice 0 est a, et $|p|$ la longueur du mot fini p :

$$\Omega = \bigcup_{\substack{\{(p,a,s),\\ \exists b,\, pas=\sigma(b)\}}} S^{|p|}\sigma[b], \qquad \text{l'union étant disjointe.}$$

On appelle *développement en préfixes-suffixes* l'application Γ qui à un point w de Ω associe sa trajectoire suivant la partition ci-dessus sous l'action de la désubstitution θ. Nous montrons au théorème 5.2 et au corollaire 5.2 que Γ est une bonne représentation de Ω :

Théorème. *L'application Γ est continue surjective de Ω dans l'espace d'un sous-shift de type fini $\mathcal{D}$ défini comme l'ensemble des chemins d'un automate dit des préfixes-suffixes. Cette application est injective sauf sur* *l'orbite des points de Ω périodiques pour la substitution σ, où les fibres sont finies. En particulier, la partition Ω sous la forme $\bigcup_{(p,a,s)} S^{|p|}\sigma[a]$ est markovienne pour la désubstitution θ.*

Le sous-shift de type fini $\mathcal{D}$ peut-être vu comme un *compact markovien stationnaire* au sens d'A. Vershik [21]. La substitution permet de définir un ordre naturel sur les triplets (p, a, s) tels qu'il existe une lettre b vérifiant $pas = \sigma(b)$. A partir de cet ordre, on obtient une transformation adique τ sur $\mathcal{D}$, dont on montre qu'elle est une bonne description du décalage S sur Ω. Plus précisément, le théorème 5.1 et la proposition 5.1 s'expriment comme suit :

Proposition. *L'application Γ conjugue le décalage S sur Ω avec une transformation adique sur le sous-shift de type fini $\mathcal{D}$. A contrario, la désubstitution θ est conjuguée par Γ à un simple décalage sur $\mathcal{D}$.*

Nous retrouvons ainsi de manière constructive et explicite le fait que tout système substitutif minimal est conjugué en mesure à une transformation adique sur un compact de Markov [12, 5].

Le fait que Γ soit un isomorphisme permet d'interpréter dynamiquement et de généraliser les résultats de [4] sur les échelles de numération associées au point fixe d'une substitution. En conséquence :

Corollaire. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_k = \{S^n\sigma^k[a];\ n \in \mathbb{N}, a \in \mathcal{A}, n < |\sigma^k(a)|\}$. Les $\mathcal{P}_k$ forment une suite de partitions génératrice en mesure.*

L'automate des préfixes-suffixes permettant de définir le sous-shift de type fini $\mathcal{D}$ est la forme la plus complète des automates du même type qui apparaissent dans la littérature. Ainsi, la donnée de cet automate est équivalente à celle du graphe dirigé défini par C. Holton et L. Zamboni dans [8] pour étudier la dimension de Hausdorff de représentations géométriques unidimensionnelles de substitutions. Ces deux auteurs étudient indépendamment et rapidement dans [9] des propriétés du graphe dirigé qui recoupent une partie des résultats précédents.

Cet automate est par construction une extension de l'*automate des préfixes* et de l'*automate des suffixes* définis par G. Rauzy dans [18, 19] pour représenter des systèmes substitutifs de type Pisot par des échanges de morceaux dans l'espace euclidien. Les sous-shifts déterminés par ces deux derniers automates ne sont que sofiques, ce qui empêche l'obtention de résultats sur l'injectivité des représentations. L'automate des préfixes-suffixes, par contre, détermine un sous-shift de type fini. Ceci est le point-clé utilisé dans [1] pour étudier l'injectivité de représentations géométriques de systèmes substitutifs, ces représentations étant définies via le sous-shift $\mathcal{D}$.

L'automate des préfixes-suffixes se retrouve sous forme codée dans les travaux en théorie des nombres développés à partir de l'automate de G. Rauzy : tout d'abord ceux de J.-M. Dumont et A. Thomas [4], sur des échelles de numérations associées à certaines substitutions définies ; ensuite leurs développement par V. Sirvent [20] pour exhiber certaines propriétés du fractal de Rauzy. Citons enfin la définition par T. Kamae dans [10] de pavages colorés à partir d'une substitution pondérée, l'agencement des pavés étant défini par des règles proches des transitions de l'automate des préfixes, mais non explicitées.

Pour finir, dans le domaine de la théorie des langages, l'automate des préfixes-suffixes se projette d'une part sur l'automate défini par A. Maes [13] dans ses travaux sur la décidabilité de théories arithmétiques, et d'autre part sur l'automate défini par P. Narbel [16] pour étudier la frontière d'un langage à partir de la description sous forme d'arbre de l'ensemble des chemins de son automate.

Remerciements. Nous tenons à remercier V. Berthé et P. Arnoux pour leurs suggestions tout au long de la rédaction de cet article. Nous remercions également les rapporteurs pour nous avoir indiqué la référence [10] et pour leurs remarques judicieuses sur le manuscrit.

1. Système dynamique substitutif

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$, où ε désigne le mot vide de $\mathcal{A}^*$. La longueur d'un mot fini u est notée $|u|$. On appelle *mot infini bilatéral* tout élément w de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On écrit un tel mot en le pointant entre w_{-1} et w_0, par exemple $w = \ldots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1\ldots$. On note $\mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des mots infini unilatéraux indexés par les entiers strictement négatifs, et $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis unilatéraux indexés par les entiers positifs ou nul. Les ensembles $\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$, pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, -\mathbb{N}^*$ sont munis du produit des topologies discrètes sur $\mathcal{A}$.

On appelle $\mathcal{B} = \{\, u.v \ ; \ u \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{-\mathbb{N}^*}, v \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{A}^{\mathbb{N}}\}$ l'ensemble de tous les mots pointés pouvant être construits à partir de $\mathcal{A}$. Cet ensemble contient $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et s'injecte canoniquement dans $(\mathcal{A}\cup\{s\})^{\mathbb{Z}}$, où s est un symbole supplémentaire, en complétant tout élément de $\mathcal{B}$ qui n'est pas indexé par $\mathbb{Z}$ par le symbole s.

On dit qu'une suite w_n d'éléments de $\mathcal{B}$ converge vers $w \in \mathcal{B}$ si les images des w_n par l'injection canonique convergent dans $(\mathcal{A}\cup\{s\})^{\mathbb{Z}}$ vers l'image de w. On remarque qu'une telle définition est cohérente avec la convergence dans $\mathcal{A}^{\mathbb{M}}$, pour $\mathbb{M} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, -\mathbb{N}^*$.

On appelle *cylindres* les ensembles :

$$[u.v] = \{(w_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}};\ w_{-|u|}\ldots w_{-1}w_0\ldots w_{|v|-1} = uv\}$$

(lorsque u est vide, le cylindre est simplement noté $[v]$). Ils sont ouverts et fermés et forment une base de la topologie de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Une *substitution* est ici un morphisme σ pour la concaténation du monoïde libre $\mathcal{A}^*$, qui envoie $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^+$ et tel qu'il existe une lettre a de $\mathcal{A}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} |\sigma^n(a)| = +\infty$. La substitution σ se prolonge de manière naturelle à l'ensemble des mots infinis $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$\sigma(\dots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1\dots) = \dots\sigma(w_{-2})\sigma(w_{-1}).\sigma(w_0)\sigma(w_1)\dots$$

Un mot infini u de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ pour lequel il existe un entier k non nul vérifiant $\sigma^k(u) = u$ est appelé un *point périodique* de σ (*point fixe* si $\sigma(u) = u$). On note Ω_{per} l'ensemble des points périodiques de la substitution. Ainsi, Ω_{per} est l'ensemble des mots w de la forme $w = \lim_{n\to+\infty} \sigma^{dn}(b).\sigma^{dn}(a)$, où a et b sont deux lettres et d un entier tels que $\sigma^d(a)$ commence par a, $\sigma^d(b)$ finit par b, et ba apparaît dans l'image par σ^d d'une lettre.

On note S le *décalage* sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, qui à tout mot $w = (w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ associe le mot $Sw = (w_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. On appelle *point S-périodique* tout mot w de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tel qu'il existe $h \geq 1$ avec $S^h(w) = w$. Une substitution σ est dite *S-périodique* s'il existe un point périodique de σ qui soit également S-périodique.

Le *langage* $\mathcal{L}(w)$ d'un mot infini w est l'ensemble de tous les mots finis qui apparaissent dans w. Le *système dynamique symbolique* engendré par un mot infini bilatéral u est le couple $(\Omega(u), S)$, où $\Omega(u) = \{w \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}(w) \subset \mathcal{L}(u)\}$. Notons que l'ensemble $\Omega(u)$ est l'adhérence, dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, de l'orbite de u sous l'action de S ; il est compact pour la topologie induite par celle de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et la restriction de S à $\Omega(u)$, encore notée S, est un homéomorphisme. On remarque que $\Omega(u)$ est fini si et seulement si u est un point S-périodique.

Une substitution σ est dite *primitive* s'il existe un entier naturel k tel que $\sigma^k(a)$ contient une occurrence de b pour tout couple $(a,b) \in \mathcal{A}^2$. Si σ est primitive, Ω_{per} est fini et non vide. Soit u un point périodique de σ, alors $\Omega(u)$ ne dépend pas de u : on le note Ω, et (Ω, S) est appelé le *système dynamique symbolique* engendré par σ. De même, $\mathcal{L}(u)$ ne dépend pas de u, on le note aussi $\mathcal{L}(\Omega)$. Si la substitution σ est primitive, le système (Ω, S) est *minimal* : il ne possède pas de fermé non trivial invariant par S. Ce système est *uniquement ergodique* : il existe une unique mesure de probabilité S-invariante sur Ω, la mesure d'un cylindre $[u.v]$ étant la fréquence d'apparition du mot uv dans n'importe quel élément de Ω. On renvoie le lecteur à [17] pour plus de développements sur ce sujet.

Dans la suite, nous ne considérerons que des substitutions primitives et non S-périodiques.

2. Désubstitution et développement en préfixes-suffixes

Soit σ une substitution primitive non S-périodique sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, d\}$ et soit (Ω, S) le système symbolique engendré par σ. Par compacité, tout mot de Ω se décompose sous la forme $w = S^k(\sigma(v))$, avec $k < |\sigma(v_0)|$, où $v \in \Omega$ et v_0 est la lettre d'indice 0 de v. L'unicité de cette décomposition est assurée par un résultat de [15], où l'auteur prouve que toute substitution primitive non S-périodique vérifie une propriété de *reconnaissabilité bilatérale*, que nous utiliserons sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\forall w \in \Omega,\ \exists\, v \in \Omega,\ \exists\, k \in \mathbb{N},\ v, k \text{ uniques}\,; \\ &w = S^k\sigma(v) \quad \text{et} \quad 0 \le k < |\sigma(v_0)|\,. \end{aligned}$$

Si on note $p = w_{-k} \ldots w_{-1}$ le préfixe de $\sigma(v_0)$ de longueur k et s le suffixe $w_1 \ldots w_l$, la connaissance du couple (v, k) est équivalente à celle de v et de la factorisation de $\sigma(v_0)$ sous la forme pw_0s. Introduisons l'ensemble de ces découpages :

$$\mathcal{P} = \{(p, a, s) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*;\ \exists\, b \in \mathcal{A}\ ,\ \sigma(b) = pas\}.$$

Définition 2.1. *Soit (Ω, S) le système dynamique symbolique engendré par une substitution σ, primitive non S-périodique. On appelle* désubstitution *l'application $\theta : \Omega \to \Omega$ définie par*

$$\theta(w) = v \quad si \quad w = S^k\sigma(v) \ \ et\ 0 \le k < |\sigma(v_0)|.$$

On note $\gamma : \Omega \to \mathcal{P}$ l'application suivante :

$$\gamma(w) = (p, w_0, s) \quad si \quad \sigma((\theta(w))_0) = pw_0s \ \ et\ \ w = S^{|p|}\sigma(\theta(w)).$$

L'existence et la continuité de ces applications découlent directement de [15]. Ceci justifie le choix de travailler sur un système dynamique bilatère plutôt qu'avec des mots unilatéraux. En fait, suivant [15], pour certaines substitutions – par exemple $\sigma(1) = 1112$ et $\sigma(2) = 12$ – la décomposition sous la forme $w = S^k(\sigma(v))$ n'est pas unique pour tous les mots unilatéraux du système dynamique, et il est impossible de définir un unique désubstitué dans ce cas.

Les ensembles $\gamma^{-1}(p, a, s)$ pour $(p, a, s) \in \mathcal{P}$ définissent une partition finie de Ω. Nous allons nous intéresser aux itinéraires des points de Ω dans cette partition sous l'action de la désubstitution θ.

Définition 2.2. *On note $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ l'application continue définie par*

$$\Gamma(w) = (\gamma\,(\,\theta^i w)\,)_{i \ge 0} = (p_i, a_i, s_i)_{i \ge 0}.$$

On appelle développement en préfixes-suffixes de *w la suite $\Gamma(w)$.*

Deux problèmes se posent : identifier $\Gamma(\Omega)$ et déterminer si Γ est injective. Nous montrerons que $\Gamma(\Omega)$ est entièrement décrit par la propriété suivante.

Remarque 2.1. *Si $w \in \Omega$ a pour développement $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$, alors*

$$(1) \qquad a_0 = w_0 \qquad et \qquad \forall i \geq 0, \quad \sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i.$$

Relativement à l'injectivité de Γ, notons la remarque suivante.

Remarque 2.2. *Soit $w \in \Omega$ et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ son développement. Si les préfixes p_i et les suffixes s_i ne sont pas tous vides à partir d'un certain rang, alors w est la limite de la suite des mots finis suivants :*

$$(2) \qquad \sigma^i(p_i)\dots\sigma^2(p_2)\sigma(p_1)p_0 \,.\, w_0 s_0 \sigma(s_1)\sigma^2(s_2)\dots\sigma^i(s_i) \quad .$$

Si les préfixes ou les suffixes sont vides à partir d'un certain rang, les mots finis ci-dessus ne convergent pas vers un mot bi-infini. Les éléments de Ω qui sont dans ce cas seront identifiés aux sections 4 et 5. On note dans la remarque suivante qu'il en existe :

Remarque 2.3. *Les développements $(p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ des points de Ω périodiques pour σ sont tels que $p_i = \varepsilon$ pour tout entier i. Les développements des antécédents par le décalage S de ces points sont tels que $s_i = \varepsilon$ pour tout entier i.*

3. Automate des préfixes-suffixes

Les propriétés des $\Gamma(w)$, où $w \in \Omega$, exprimées à la remarque 2.1 amènent à définir l'automate suivant.

Définition 3.1. *L'*automate des préfixes-suffixes *$\mathcal{A}_\sigma$ associé à la substitution σ est défini comme suit :*

- *$\mathcal{A}$ est l'ensemble des états. Tous les états sont initiaux.*
- *$\mathcal{P}$ est l'ensemble des étiquettes.*
- *Il existe une flèche entre les états a et b étiquetée par $e = (p, a, s)$ si $\sigma(b) = pas$.*

La matrice d'adjacence du graphe dirigé sous-jacent à $\mathcal{A}_\sigma$ est la matrice de σ, dont le coefficient (i, j) est le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\sigma(j)$. Si σ est primitive, l'automate $\mathcal{A}_\sigma$ est fortement connexe. La figure 1 donne un exemple d'un tel automate.

Définition 3.2. *Un élément $(e_i)_{i\geq 0}$ de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ est dit* admissible *s'il s'agit d'un mot infini reconnu par l'automate des préfixes-suffixes. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ qui sont admissibles.*

Un chemin est étiqueté par les $e_i = (p_i, a_i, s_i)$ si et seulement si $\sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i$ pour tout i positif. On en déduit que $\mathcal{D}$ est le sous-shift de type fini de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ pour lequel les mots interdits sont toutes les paires d'étiquettes qui ne se suivent pas dans l'automate.

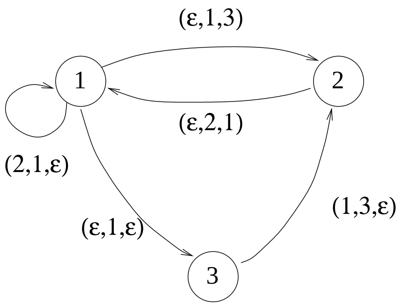

FIGURE 1. automate des préfixes-suffixes pour $\sigma : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$

Proposition 3.1. *L'ensemble $\mathcal{D}$ muni du décalage de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ est un sous-shift de type fini associé à la matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{D}} = (m_{(p,a,s),(q,b,r)})_{((p,a,s),(q,b,r))\in\mathcal{P}^2}$ définie par*

$$m_{(p,a,s),(q,b,r)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma(b) = pas \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut maintenant répondre partiellement à la question sur l'image de Γ et de son injectivité.

Proposition 3.2. *On a $\Gamma(\Omega) \subset \mathcal{D}$. De plus, Γ est injective sur $\Gamma^{-1}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon)$, et $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon \subset \Gamma(\Omega)$, avec*

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \{(p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0} \in \mathcal{D}\ ;\ (\exists\, i_0 \in \mathbb{N})(\forall\, i \geq i_0,\, p_i = \varepsilon)\ \textit{ou}\ (\forall\, i \geq i_0,\, s_i = \varepsilon)\}.$$

Preuve. Le fait d'avoir $\Gamma(\Omega) \subset \mathcal{D}$ est une conséquence directe de la remarque 2.1. L'injectivité de Γ sur $\Gamma^{-1}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon)$ provient de la formule (2). Si $e = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon$, la suite des mots $\sigma^i(p_i) \ldots p_0.a_0 s_0 \ldots \sigma^i(s_i)$ converge vers un mot infini w de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Celui-ci a tous ses facteurs dans $\mathcal{L}(\Omega)$ et appartient ainsi à Ω. La définition de Γ implique $\Gamma(w) = e$ et donc $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon \subset \Gamma(\Omega)$. □

Les problèmes posés la surjectivité et l'injectivité de Γ se ramènent donc à l'étude précise de $\Gamma^{-1}\mathcal{D}_\varepsilon$. Par application du décalage (voir section 5), ceci revient à étudier les mots de Ω dont les développements ont tous leurs préfixes ou tous leurs suffixes vides.

4. Développement des points périodiques

Soit $\mathcal{D}_{min} = \{(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D};\ \forall i \in \mathbb{N},\ p_i = \varepsilon,\}$ et $\mathcal{D}_{max} = \{(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D};\ \forall i \in \mathbb{N}, s_i = \varepsilon\}$.

Le but de cette section est de montrer que les inclusions $\Gamma(\Omega_{per}) \subset \mathcal{D}_{min}$ et $\Gamma\left(S^{-1}(\Omega_{per})\right) \subset \mathcal{D}_{max}$ (remarque 2.3) sont des égalités.

Si $(\varepsilon, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}_{min}$, les a_i forment une suite périodique, puisque l'automate défini sur $\mathcal{A}$ par $a \to b$ si $\sigma(b)$ commence par a est codéterministe. Ceci implique qu'il y a au plus d éléments dans $\mathcal{D}_{min}$. De même, $\mathcal{D}_{max}$ contient au plus d éléments. On en déduit aussi :

Lemme 4.1. *Soit $w \in \Omega$. Le développement $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$ est dans $\mathcal{D}_{min}$ (respectivement $\mathcal{D}_{max}$) si et seulement si $w \in \Omega_{per}$ (respectivement $Sw \in \Omega_{per}$).*

Preuve. Les preuves pour $\mathcal{D}_{min}$ et $\mathcal{D}_{max}$ étant analogues, examinons seulement le cas des préfixes vides. On sait déjà que $\Gamma(\Omega_{per}) \subset \mathcal{D}_{min}$. Réciproquement, si $p_i = \varepsilon$ pour tout i, la suite $(a_i)_i$ est périodique. Soit l sa période. La partie positive w^+ est alors uniquement déterminée par $w^+ = w_0 w_1 \cdots = \lim_{n\to\infty} \sigma^{nl}(a_0)$.
Les désubstitués $v^i = \theta^i(w)$ de w sont tels que $v^i = S^{|p_i|}\sigma(v^{i+1}) = \sigma(v^{i+1})$. Si $b_i = v^i{}_{-1}$ est la lettre d'indice -1 du mot v^i, la suite $(b_i)_i$ est périodique puisque $\sigma(b_{i+1}) = p_i b_i$. Si m est sa période, comme $w = \sigma^i(v^i)$, la partie w^- de w indexée négativement se termine par tous les $\sigma^i(b_i)$, ce qui implique $\ldots w_{-2}w_{-1} = w^- = \lim_{i\to\infty} \sigma^{i+m}(b_{i+m}) = \sigma^m(\lim_{i\to\infty} \sigma^i(b_{i+m})) = \sigma^m(w^-)$. En définitive $w = w^- \,.\, w^+ = \sigma^{lm}(w) \in \Omega_{per}$. □

Théorème 4.1. *On a*

$$\Gamma(\Omega_{per}) = \mathcal{D}_{min} \quad \textit{et} \quad \Gamma(\,S^{-1}(\Omega_{per})\,) = \mathcal{D}_{max},$$

$$\Gamma^{-1}(\mathcal{D}_{min}) = \Omega_{per} \quad \textit{et} \quad \Gamma^{-1}(\mathcal{D}_{max}) = S^{-1}(\Omega_{per}).$$

Preuve. Si $e = (\varepsilon, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}_{min}$, les lettres a_i forment une suite périodique. Soit l sa période. Il existe un mot fini W tel que $\sigma^l(a_0) = a_0 W$. Soit $b_0 \in \mathcal{A}$ tel que $b_0 a_0 \in \mathcal{L}(\Omega)$ et b_i les lettres définies par $\sigma^l(b_i) = V_{i+1} b_{i+1}$ où les V_i sont des mots finis. Comme l'alphabet $\mathcal{A}$ est fini, il existe $j_0 > i_0$ tels que $b_{i_0} = b_{j_0}$. Par définition des b_i, on a $\sigma^{(j_0-i_0)l}(b_{i_0}) = v_{i_0+(j_0-i_0)} b_{i_0+(j_0-i_0)} = V_{j_0} b_{j_0}$. Ainsi, $k = j_0 - i_0$ et $V = V_{j_0}$ sont tels que $\sigma^{kl}(b_{i_0}) = V b_{i_0}$. Puisque $b_0 a_0 \in \mathcal{L}(\Omega)$, on a $b_{i_0} a_0 \in \mathcal{L}(\Omega)$. Le fait que $\sigma^{kl}(b_{i_0} a_0) = V b_{i_0} a_0 W$, avec W et V non vides par primitivité (quitte à remplacer kl par un multiple), entraîne donc que $w = \lim_{n\to\infty} \sigma^{nkl}(b_{i_0}.a_0) \in \Omega_{per}$. Ainsi, $\Gamma(w) \in \mathcal{D}_{min}$. De plus, les définitions de θ et γ impliquent directement que les lettres d'indice 0 des $\theta^i w$ sont les a_i, ce qui prouve que $\Gamma(w) = e$.

Dans le cas où $e = (p_i, a_i, \varepsilon)_i \in \mathcal{D}_{max}$, la lettre a_0 vérifie $\sigma^l(a_0) = V a_0$, et on obtient une lettre b_{i_0} telle que $\sigma^{kl}(b_{i_0}) = b_{i_0} W$ avec $a_0 b_{i_0} \in \mathcal{L}(\Omega)$. Ainsi, $w = \lim_{n\to\infty} \sigma^{nkl}(a_0.b_i) \in \Omega_{per}$ et vérifie $e = \Gamma(S^{-1}(w))$.

On a ainsi prouvé que $\mathcal{D}_{min} \subset \Gamma(\Omega_{per})$ et que $\mathcal{D}_{max} \subset \Gamma(\,S^{-1}(\Omega_{per})\,)$ ce qui, avec le lemme 4.1, termine la démonstration. □

Notons que Γ n'est pas nécessairement une bijection de Ω_{per} sur $\mathcal{D}_{min}$ ou de $S^{-1}(\Omega_{per})$ sur $\mathcal{D}_{max}$, comme le montre l'exemple suivant, où $S^{-1}(\Omega_{per})$ et $\mathcal{D}_{max}$ sont de cardinal différent.

Exemple 4.1 La substitution $\sigma\,:\,1\mapsto 21,\,2\mapsto 13,\,3\mapsto 1$ possède deux points périodiques u_1 et u_2 (de période 2) tandis que $\mathcal{D}_{min}=\{m_1,m_2\}$ et $\mathcal{D}_{max}=\{M\}$, avec :

$$u_1=\lim_{n\to\infty}\sigma^{2n}(1.1)=\ldots 1321212111321.1321212111\ldots$$
$$u_2=\lim_{n\to\infty}\sigma^{2n}(1.2)=\ldots 1321212111321.211132113211\ldots$$
$$m_1=\Gamma(u_1)=((\varepsilon,2,1),(\varepsilon,1,3))^\infty \qquad m_2=\Gamma(u_2)=((\varepsilon,1,3),(\varepsilon,2,1))^\infty,$$
$$M=\Gamma(S^{-1}(u_1))=\Gamma(S^{-1}(u_2))=(2,1,\varepsilon)^\infty.$$

La section suivante permet de ramener l'étude de $\mathcal{D}_\varepsilon$ à celle de $\mathcal{D}_{min}$ et $\mathcal{D}_{max}$, et de régler ainsi les problèmes de la surjectivité de Γ dans $\mathcal{D}$ et de son injectivité en mesure.

5. Ordre et successeur

Sur des supports de sous-shifts de type fini semblables à $\mathcal{D}$, A. M. Vershik [21] utilise la terminologie des *compacts markoviens* et, à partir d'un ordre arbitraire sur l'alphabet, définit un ordre sur le support du sous-shift et un passage au successeur appelé *transformation adique*, en raison de la similarité avec les odomètres. Cette transformation fut d'abord introduite sur les diagrammes de Brattelli [7, 21], et a permis d'étudier le groupe de dimension des systèmes substitutifs [5]. Dans cette section, nous étudions la *transformation adique* obtenue sur $\mathcal{D}$, l'ordre $\prec$ sur $\mathcal{P}$ étant défini naturellement à partir de la substitution.

Plus précisément, pour deux éléments (p,a,s) et (q,b,r) de $\mathcal{P}$, on pose :

(3)
$$(p,a,s)\prec(q,b,r)\iff(\exists\,c\in\mathcal{A});\ \ (\,pas=qbr=\sigma(c)\,)\ \text{ et }\ (\,|p|<|q|\,).$$

Sur l'automate des préfixes-suffixes $\mathcal{A}_\sigma$, deux étiquettes sont comparables si, et seulement si, elles marquent des transitions arrivant au même état. Pour cet ordre, un élément (p,a,s) est *minimal* si son préfixe p est vide et *maximal* si son suffixe s est vide. Ainsi, en chaque état de l'automate, arrivent une unique arête minimale $e=(\varepsilon,a,s)$ et une unique arête maximale $f=(p,b,\varepsilon)$.

Remarquons que si $(p,a,s)\in\mathcal{P}$ n'est pas maximal, alors l'élément (q,b,r) de $\mathcal{P}$ défini par $pas=qbr$ et $|p|+1=|q|$ est le plus petit des majorants stricts de (p,a,s).

Reprenons la substitution $\sigma\,:\,1\mapsto 21,\,2\mapsto 13,\,3\mapsto 1$, l'ordre $\prec$ est explicité figure 2.

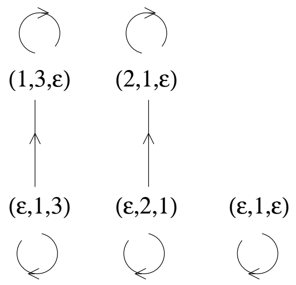

FIGURE 2. ordre $\prec$ pour $\sigma : 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$

L'ordre sur $\mathcal{P}$ permet de définir sur $\mathcal{D}$ un ordre lexicographique inverse encore noté $\prec$: si $(e_i)_i$ et $(f_i)_i$ sont deux suites de $\mathcal{D}$, on pose

$$(e_i)_i \prec (f_i)_i \iff (\exists\, i_0 \geq 0);\ (\forall\, i > i_0,\ e_i = f_i) \text{ et } (e_{i_0} \prec f_{i_0}). \tag{4}$$

Un élément $(e_i)_i$ de $\mathcal{D}$ est minimal (respectivement maximal) si pour tout i, e_i est un minimal (respectivement maximal) dans $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que tous les préfixes (respectivement suffixes) de $(e_i)_i$ sont vides. L'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{D}$ est donc $\mathcal{D}_{min}$, celui des éléments maximaux $\mathcal{D}_{max}$. Le théorème 4.1 signifie alors que $w \in \Omega$ est périodique pour σ si et seulement si son développement $\Gamma(w)$ est minimal, ou encore si et seulement si $\Gamma(S^{-1}w)$ est maximal.

Définition 5.1. *Soit $e = (e_i)_i \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{max}$, et i_0 le plus petit entier tel que e_{i_0} n'est pas maximal. L'image de e par l'application* successeur *$\tau : \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{max} \to \mathcal{D}$ est l'élément $\tau(e) = f$ de $\mathcal{D}$ défini par :*
- *si $i > i_0$, $f_i = e_i$,*
- *$f_{i_0} = (q_{i_0}, b_{i_0}, r_{i_0})$ défini par $e_{i_0} = (p_{i_0}, a_{i_0}, s_{i_0}) \prec f_{i_0}$ et $|q_0| = |p_0| + 1$.*
- *si $0 \leq i < i_0$ et $\sigma(b_{i+1}) = b_i r_i$, $f_i = (\varepsilon, b_i, r_i)$.*

Notons que, si $e \notin \mathcal{D}_{max}$, alors $\tau(e)$ est le plus petit des majorants stricts de e. La définition de τ implique facilement le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Le successeur τ est une bijection de $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{max}$ dans $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{min}$. Si w est un élément de Ω tel que Sw n'est pas périodique pour σ, alors*

$$\Gamma(S(w)) = \tau(\Gamma(w)). \tag{5}$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \backslash S^{-1}(\Omega_{per}) \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\Gamma"'] & \Omega \backslash \Omega_{per} \arrow[d, "\Gamma"] \\
\mathcal{D} \backslash \mathcal{D}_{max} \arrow[r, "\tau"'] & \mathcal{D} \backslash \mathcal{D}_{min}
\end{tikzcd}$$

Revenons sur l'exemple de la substitution $\sigma :\ 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$. Le point $m_1 = [(\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,3)]^\infty \in \mathcal{D}$ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl}
m_1 & = & (\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,3)(\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,3)\ldots \\
\tau(m_1) & = & (2,1,\varepsilon) \quad - \quad - \quad - \quad \ldots \\
\tau^2(m_1) & = & (\varepsilon,1,\varepsilon)(1,3,\varepsilon) \quad - \quad - \quad \ldots \\
\tau^3(m_1) & = & (\varepsilon,1,3)(\varepsilon,2,1)(2,1,\varepsilon) \quad - \quad \ldots \\
\tau^4(m_1) & = & (1,3,\varepsilon) \quad - \quad - \quad - \quad \ldots \\
\tau^5(m_1) & = & (\varepsilon,2,1)(2,1,\varepsilon) \quad - \quad - \quad \ldots \\
\tau^6(m_1) & = & (2,1,\varepsilon) \quad - \quad - \quad - \quad \ldots \\
\tau^7(m_1) & = & (\varepsilon,1,3)(\varepsilon,2,1)(\varepsilon,1,\varepsilon)(1,3,\varepsilon)\ldots
\end{array}$$

et ainsi $\tau^7(m_1) = \Gamma(S^7 u_1)$.

Une solution naturelle pour définir le successeur d'un point maximal serait de lui associer un point minimal. Ceci est généralement impossible, puisque pour la plupart des substitutions, le nombre de points minimaux diffère de celui des points maximaux, comme dans le cas déjà vu de la substitution $\sigma :\ 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$.

Dans le cas particulier où σ est une substitution *propre* (*id est* ne possède qu'un seul point périodique), l'application successeur τ est définie sur tout $\mathcal{D}$ en posant $\tau(p_{max}) = p_{min}$, où p_{min} est l'unique point minimal de $\mathcal{D}$ et p_{max} l'unique point maximal. Le système dynamique $(\mathcal{D},\tau)$ est alors un odomètre généralisé (voir [6]).

Le successeur permet de relier $\mathcal{D}_\varepsilon$ à $\mathcal{D}_{min}$ et $\mathcal{D}_{max}$: la définition de τ implique facilement qu'un élément de $\mathcal{D}$ a tous ses préfixes (respectivement suffixes) vides à partir d'un certain rang si et seulement s'il appartient à l'orbite positive (respectivement négative) par τ de $\mathcal{D}_{min}$ (respectivement $\mathcal{D}_{max}$) :

$$\mathcal{D}_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 0} \left(\tau^n \mathcal{D}_{min} \cup \tau^{-n}\mathcal{D}_{max}\right).$$

Corollaire 5.1.

$$\Gamma\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S^n\Omega_{per}\Big) = \mathcal{D}_\varepsilon \qquad et \qquad \Gamma^{-1}(\mathcal{D}_\varepsilon) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} S^n \Omega_{per}.$$

De ce qui précède, on déduit que Γ est une bonne représentation de Ω :

Théorème 5.2. *Si σ est une substitution primitive et non S-périodique, l'application Γ est continue surjective de Ω sur le support du sous-shift de type fini $\mathcal{D}$. Elle est injective sur $\Omega \setminus \cup_{k\in\mathbb{Z}} S^k\Omega_{per}$ et est donc injective en mesure. De plus, pour tout $d \in \mathcal{D}$, on a $card(\,\Gamma^{-1}(d)\,) \leq card(\,\Omega_{per}\,)$.*

Dans le cas particulier d'une substitution propre, Γ est un homéomorphisme et on retrouve un résultat de [5] disant que (Ω, S) est topologiquement isomorphe à une application adique sur le support d'un sous-shift de type fini. L'intérêt de notre résultat est que l'isomorphisme est constructif.

Cette étude sera complète lorsqu'on aura déterminé comment Γ agit sur la désubstitution θ et la substitution σ. Par construction, $\Gamma \circ \theta$ est le décalage T sur $\mathcal{D}$. L'application $\Gamma \circ \sigma$, qui est plus ou moins l'inverse de $\Gamma \circ \theta$, devrait donc être l'inverse du décalage T sur $\mathcal{D}$. Or, $\mathcal{D}$ est constitué de suites indexées par $\mathbb{N}$, et T^{-1} n'est pas défini sur $\mathcal{D}$: un élément de $\mathcal{D}$ peut-être prolongé de différentes manières vers la gauche. La proposition suivante signifie que le fait d'appliquer $\Gamma \circ \theta$ revient à choisir le plus petit des prolongements à gauche.

Proposition 5.1. *Soit T le* décalage *sur $\mathcal{D}$ et $\rho : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ l'application définie comme un* prolongement minimal à gauche *par $\rho(e_i)_i = (f_i)_i$ avec*

$$\begin{cases} f_0 &= (\varepsilon, b_0, s) \quad \text{où } e_0 = (p_0, a_0, s_0) \text{ et } \sigma(a_0) = b_0 s \\ f_i &= e_{i-1} \qquad\quad \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Les deux diagrammes suivants sont commutatifs.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ {\scriptstyle\Gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Gamma} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[\rho]{} & \mathcal{D} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\theta} & \Omega \\ {\scriptstyle\Gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Gamma} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[T]{} & \mathcal{D} \end{array}$$

Ces résultats s'interprètent dynamiquement par le fait que le système (Ω, θ) admet une partition markovienne (voir [11], partie 6.5).

Corollaire 5.2. *La partition de Ω par les ensembles*

$$\{\gamma^{-1}(p, a, s);\ (p, a, s) \in \mathcal{P}\}$$

est une partition de Markov de (Ω, θ) en mesure.

Preuve. Les ensembles $\gamma^{-1}(p, a, s)$ sont des ouverts-fermés de Ω disjoints deux à deux par définition et continuité de γ. Alors $(\mathcal{D}, T)$ est le système symbolique correspondant à la partition, puisque Γ est surjective et $(\mathcal{D}, T)$ est le sous-shift de type fini de matrice $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$ (formule (3.1)). Ceci assure que $\theta(\gamma^{-1}(p, a, s))$ est l'union des $\gamma^{-1}(q, b, r)$ pour $m_{(p,a,s),(q,b,r)} = 1$. Enfin, si $e = (e_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$, par définition de Γ on a $\cap_{i \in \mathbb{N}} \theta^{-i}(\gamma^{-1}(e_i)) = \Gamma^{-1}(e)$, qui est presque-sûrement réduit à un point. $\square$

6. Echelles de numération et partition génératrice

Pour tout $b \in \mathcal{A}$, soit $(b) = \{(p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D};\ a_0 = b\}$ l'ensemble des étiquettes des chemins de l'automate qui partent de l'état b. Une conséquence de la surjectivité de Γ est : $\Gamma[\,b\,] = (b)$. Plus généralement, notons $<e_0, \ldots, e_p>$ un cylindre de longueur $p+1$ de $\mathcal{D}$. Les cylindres de $\mathcal{D}$ et ceux de Ω sont liés par la relation suivante.

Proposition 6.1. *Soient $a \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n < |\sigma^k(a)|$, il existe un unique chemin de longueur k de $\mathcal{A}_\sigma$, étiqueté $e_0, \ldots, e_{k-1}$ et arrivant en l'état a, tel que $\Gamma(\, S^n \sigma^k[a]\,) \subset <e_0, \ldots, e_{k-1}>$.*

Preuve. L'unicité du chemin est évidente. L'existence du chemin se prouve par l'algorithme glouton suivant.

Si $a_k = a$ et $n_k = n$, on a $n_k < |\sigma^k(a_k)|$. Soit p_{k-1} le plus long préfixe de $\sigma(a_k)$ tel que $|\sigma^{k-1}(p_{k-1})| \leq n_k$ et a_{k-1} défini par $\sigma(a_k) = p_{k-1}a_{k-1}s_{k-1}$. Alors $(p_{k-1}, a_{k-1}, s_{k-1})$ étiquette une arête de l'automate entre a_{k-1} et a_k, et $S^{|p_{k-1}|}\sigma[a_k] \subset [a_{k-1}]$. De ce fait, si $n_{k-1} = n_k - |\sigma^{k-1}(p_{k-1})|$, on a

$$\begin{aligned} S^{n_k}\sigma^k[a_k] = S^{n_{k-1}}S^{|\sigma^{k-1}(p_{k-1})|}\sigma^k[a_k] &= S^{n_{k-1}}\sigma^{k-1}(S^{|p_{k-1}|}\sigma[a_k]) \\ &\subset S^{n_{k-1}}\sigma^{k-1}[a_{k-1}]. \end{aligned}$$

Par choix de p_{k-1} on a $n_{k-1} < |\sigma^{k-1}(a_{k-1})|$, ce qui assure qu'on peut réitérer le processus et obtenir une suite de lettres a_i, d'étiquettes (p_i, a_i, s_i) de l'automate entre a_i et a_{i+1}, et d'entiers $n_i < |\sigma^i(a_i)|$ vérifiant $n_i = n_{i+1} - |\sigma^i(p_i)|$ tels que :

$$S^n\sigma^k[a] = S^{n_k}\sigma^k[a_k] \subset S^{n_{k-1}}\sigma^{k-1}[a_{k-1}] \subset \cdots \subset S^{n_1}\sigma[a_1] \subset [a_0].$$

Ainsi, $\gamma\,(\, S^n\sigma^k[a]\,) = (p_0, a_0, s_0)$ et $\theta\,(\, S^n\sigma^k[a]\,) \subset S^{|p_1|}\sigma[a_2] \subset [a_1]$, et à nouveau $\gamma\,(\theta\, S^n\sigma^k[a]\,) = (p_1, a_1, s_1)$ avec $\theta^2\,(\, S^n\sigma^k[a]\,) \subset S^{|p_2|}\sigma[a_3] \subset [a_2]$. De proche en proche, on obtient $\gamma\,(\theta^i\, S^n\sigma^k[a]\,) = (p_i, a_i, s_i)$ pour $i < k$. $\square$

La surjectivité de Γ permet de préciser la proposition 6.1 en identifiant les préimages des cylindres de $\mathcal{D}$.

Corollaire 6.1. *Soit $(e_i)_{i \leq k} = (p_i, a_i, s_i)_{i \leq k}$ un chemin de longueur $k+1$ de l'automate des préfixes-suffixes. Si $n = |\sigma^k(p_k)| + \cdots + |\sigma(p_1)| + |p_0|$, alors*

$$<e_0, \ldots, e_k> = \bigcup_{\substack{b \in \mathcal{A}\,; \\ \sigma(b) = p_k a_k q_k}} \Gamma(\, S^n\, \sigma^{k+1}[b]\,)$$

l'union étant disjointe.

Corollaire 6.2. *Soit a une lettre de $\mathcal{A}$ telle que $\sigma(a) = av$ avec $v \in \mathcal{A}^+$. Alors pour tout entier n, il existe dans $\mathcal{A}_\sigma$ un unique chemin arrivant en a noté $(p_0, a_0, s_0) \ldots (p_{k-1}, a_{k-1}, s_{k-1})$, avec $p_{k-1} \neq \varepsilon$, tel que n s'écrive :*

$$n = |\sigma^{k-1}(p_{k-1})| + \cdots + |\sigma(p_1)| + |p_0|.$$

On retrouve ici, comme cas particulier, la décomposition définie dans [4] d'un entier n dans la “base” de numération associée au point fixe d'une substitution. On peut ainsi voir la proposition 6.1 comme une généralisation de [4] et les échelles de numération associées à une substitution comme des structures sous-jacentes à la dynamique de la désubstitution θ sur Ω.

Les cylindres $<e_0, \ldots, e_{k-1}>$ de longueur k forment une partition génératrice canonique de $\mathcal{D}$. L'injectivité de Γ, sauf sur un ensemble dénombrable, permet de remonter cette partition génératrice en une partition de Ω, constituée des préimages des cylindres de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire les $S^n\, \sigma^k[a]$.

Cette partition n'est pas topologique, dans la mesure où il est nécessaire d'isoler un nombre dénombrable de points qui ne sont pas séparés par la partition.

Ce résultat généralise celui obtenu dans [5], où les auteurs définissent une partition topologiquement génératrice dans le cas d'une substitution propre.

Proposition 6.2. *Soir σ une substitution primitive et Ω le système substitutif associé à σ.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\Lambda_k = \{S^n\sigma^k[a];\ n \in \mathbb{N},\, a \in \mathcal{A},\, n < |\sigma^k(a)|\}$. Les Λ_k forment une suite de partitions génératrice en mesure.

Plus précisément, il existe un ensemble $\mathcal{N}$ dénombrable tel que pour tout entier k, $\Omega \setminus \mathcal{N} = \bigcup_{C\in\Lambda_k} C \setminus \mathcal{N}$, où l'union est disjointe. Pour toute suite $(C_k)_{k\geq 0}$ avec $C_k \in \Lambda_k$, $\cap C_k$ est réduit à 0 ou 1 point ou bien consiste en un nombre fini de points de $\mathcal{N}$.

Preuve. Soit $(C_k)_{k\geq 0}$, $C_k \in \Lambda_k$ pour tout k, des sous-ensembles appartenant à chacune des partitions. D'après la proposition 6.1, $\Gamma(C_k)$ est inclus dans un unique cylindre de $\mathcal{D}$ de longueur k. Ainsi, $\cap_{k\geq 0}\Gamma(C_k)$ est inclus dans l'intersection de cylindres de longueur croissante de $\mathcal{D}$, qui soit est vide, soit contient un unique élément de $\mathcal{D}$. Dans le cas non vide, on a

$$\cap_{k\geq 0}\Gamma(C_k) = \Gamma(\cap_{k\geq 0}C_k) = \{e\} \quad \text{et donc} \quad \cap_{k\geq 0} C_k = \Gamma^{-1}\{e\}.$$

Soit $\mathcal{N}$ l'union dans Ω des orbites des points périodiques pour σ. Selon le théorème 5.2, si $e \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{D}$, $\Gamma^{-1}\{e\}$ est vide. Si $e \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_\varepsilon$, $\Gamma^{-1}\{e\}$ est réduit à une point. Si $e \in \mathcal{D}_\varepsilon$, $\Gamma^{-1}\{e\}$ est fini et inclus dans $\mathcal{N}$.

La suite de partitions Λ_k sépare ainsi tout point de l'ensemble de mesure pleine $\Omega \setminus \mathcal{N}$. $\square$

Concernant les partitions Λ_k, on notera que pour tout $C_k \in \Lambda_k$ et $C_{k+1} \in \Lambda_{k+1}$, C_{k+1} est inclus ou strictement disjoint de C_k.

Application Reprenons l'exemple de la substitution $\sigma\,:\, 1 \mapsto 21,\, 2 \mapsto 13,\, 3 \mapsto 1$. L'objectif est de représenter $\mathcal{D}$ par un compact de $\mathbb{C}$ sur lequel le successeur s'interprète comme un échange de 3 morceaux. Le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence est $X^3 - X^2 - X - 1$ (voir [1] pour plus de détails). Notons α une racine de module inférieur à 1. Soit

$\delta(\varepsilon) = 0$, $\delta(1) = 1$, $\delta(2) = \alpha - 1$ et $\delta(3) = 1/\alpha$ et soit la fonction $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(\,(p_i, a_i, s_i)_i\,) = \sum_{i \geq 0} \delta(p_i)\, \alpha^i.$$

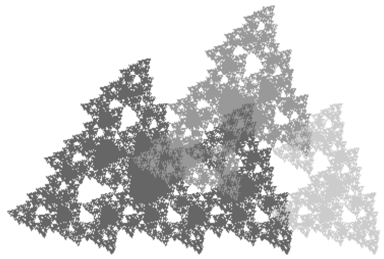

FIGURE 3. Fractal de Rauzy pour $\sigma :\ 1 \mapsto 21,\ 2 \mapsto 13,\ 3 \mapsto 1$

On vérifie que

$$\forall\, e = (p_i, a_i, s_i)_i \in \mathcal{D}; \quad \varphi(\tau(e)) = \varphi(e) + \delta(a_0),$$

et que les images des cylindres $\mathcal{F}_i = \varphi(i)$, pour $i = 1, 2, 3$, sont disjointes en mesure dans le plan. L'image $\mathcal{F}$ de φ (cf. figure 3), qui a une structure auto-similaire, est ainsi stable par l'échange de morceaux défini sur chacun des $\mathcal{F}_i$ par $z \mapsto z + \delta(i)$. L'application φ étant injective en mesure, on obtient bien que le support du sous-shift $\mathcal{D}$ muni de l'application successeur τ est conjugué en mesure à un échange de morceaux dans le compact $\mathcal{F}$.

Enfin le fractal $\mathcal{F}$ se projette sur le tore $\mathbb{T}^2$ de sorte que les projections des $\delta(i)$ soient égales. Ainsi le système dynamique $(\mathcal{D}, \theta)$ admet pour facteur une translation du tore $\mathbb{T}^2$. Cet exemple est généralisé dans [1].

Plus précisément, à toute substitution primitive de type Pisot, sont associées deux représentations géométriques explicites des systèmes dynamiques $(\mathcal{D}, \tau)$ et (Ω, S), l'une est une translation minimale sur un tore, l'autre est un échange de morceaux euclidien. Les propriétés de Γ démontrées ici permettent de prouver que la représentation par un échange de morceaux est injective en mesure lorsque la substitution vérifie une condition combinatoire.

Bibliographie

[1] V. CANTERINI, A. SIEGEL, *Geometric representation of primitive substitutions of Pisot type.* Prépublication 00-02, Institut de Mathématiques de Luminy, 2000.

[2] E. M. Coven, M. S. Keane, *The structure of substitution minimal sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **162** (1971), 89–102.

[3] F. M. Dekking, *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **41** (1978), 221–239.

[4] J.-M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions.* Theoret. Comput. Sci. **65** (1989), 153–169.

[5] F. Durand, B. Host, C. Skau, *Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups.* Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), 953–993.

[6] P. J. Grabner, P. Liardet, R. F. Tichy, *Odometers and systems of numeration.* Acta Arith. **70** (1995), 103–123.

[7] R. H. Herman, I. F. Putnam, C. F. Skau, *Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics.* Internat. J. Math. **3** (1992), 827–864.

[8] C. Holton, L. Q. Zamboni, *Geometric realizations of substitutions.* Bull. Soc. Math. France **126** (1998), 149–179.

[9] C. Holton, L. Q. Zamboni, *Directed graphs and substitutions.* Dans From Cristals to Chaos, World Scientific, New York, 1999.

[10] T. Kamae, *Linear expansions, strictly ergodic homogeneous cocycles and fractals.* Israel J. Math. **106** (1998), 313–337.

[11] D. Lind, B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] A. N. Livshits, *Sufficient conditions for weak mixing of substitutions and of stationary adic transformations.* Mat. Zametki **44** (1988), 785–793. English translation: Math. Notes **44** (1988), 920–925.

[13] A. Maes, *Morphic predicates and applications to the decidability of arithmetic theories.* Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainault, 1999.

[14] J. C. Martin, *Minimal flows arising from substitutions of non-constant length.* Math. Systems Theory **7** (1973), 73–82.

[15] B. Mossé, *Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques.* Bull. Soc. Math. France **124**, (1996), 329–346.

[16] P. Narbel, *The boundary of iterated morphisms on free semi-groups.* Internat. J. Algebra Comput. **6** (1996), 229–260.

[17] M. Queffélec, *Substitution dynamical systems—spectral analysis.* Lecture Notes in Mathematics **1294**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[18] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.

[19] G. Rauzy, *Rotations sur les groupes, nombres algébriques, et substitutions.* Dans Séminaire de Théorie des Nombres, 1987–1988 (Talence, 1987–1988), Univ. Bordeaux I, Talence, 1988. Exp. No. 21.

[20] V. F. Sirvent, *Modelos geométricos asociados a substituciones.* Trabajo de ascenso, Universidad Simón Bolívar, 1998.

[21] A. M. Vershik, *Uniform algebraic approximation of shift and multiplication operators.* Dokl. Akad. Nauk SSSR **259** (1981), 526–529. English translation: *Soviet Math. Dokl.* **24** (1981), 97–100.

Vincent Canterini, Anne Siegel
Institut de Mathématiques de Luminy
UPR 9016, Case 907
163 avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
E-mail : `canterin@iml.univ-mrs.fr`
`siegel@iml.univ-mrs.fr`