Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2003), **23**, 1–27
DOI: 10.1017/S0143385702001232

Représentation des systèmes dynamiques substitutifs non unimodulaires

ANNE SIEGEL

IRISA UMR-CNRS 6074, Campus be Beaulieu, 35042 Rennes Cédex, France
(e-mail: asiegel@irisa.fr)

(*Received* 2 *June* 2001 *and accepted in revised form* 9 *July* 2002)

Résumé. On montre que la condition combinatoire de forte coïncidences est suffisante pour qu'un système substitutif de type Pisot soit isomorphe en mesure à un échange de morceaux dans un compact autosimilaire de mesure non nulle dans le produit d'un espace euclidien et d'extensions finies de corps p-adiques. En particulier, tout système substitutif de type Pisot est une extension finie de son facteur équicontinu maximal ; en règle générale, ce dernier contient une translation p-adique si et seulement si la matrice d'incidence de la substitution est nilpotente modulo p.

Abstract. The combinatorial condition of *strong coincidence* is proved to be a sufficient condition for the dynamical system associated with a non-unimodular substitution of Pisot type to be measure-theoretically isomorphic with an exchange of domain on a set called the *Rauzy fractal of the substitution*. The Rauzy fractal is a self-similar compact subset of the product of an Euclidean space with finite extensions of p-adic fields. As a consequence, every substitutive dynamical system of Pisot type is a finite extension of its maximal equicontinuous factor. We prove that this maximal factor contains a p-adic translation if and only if the incidence matrix of the substitution is nilpotent modulo p.

1. *Introduction*

L'étude des exemples de systèmes substitutifs que sont les systèmes associés aux substitutions de Morse ($1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 21$), Fibonacci ($1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 1$), et Tribonacci ($1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 13$, $3 \mapsto 1$) montre que le premier admet une composante spectrale continue tandis que les deux suivants sont à spectre discret et explicitement conjugués en mesure à une translation sur un tore. Une question naturelle est ainsi de comprendre quels systèmes substitutifs sont isomorphes en mesure à une translation sur un groupe compact, ou plus généralement de trouver leur facteur équicontinu maximal.

Une réponse complète a été obtenue durant les années 1960–1970 concernant les substitutions de longueur constante (voir en particulier [**Kam72, Mar73, Dek78**]) : le facteur équicontinu maximal d'un système substitutif de longueur constante l est une translation sur le produit direct du groupe des entiers l-adiques $\mathbb{Z}_l$ et d'un groupe fini ; il y a de plus un isomorphisme mesurable entre un système substitutif de longueur constante et son facteur équicontinu maximal si et seulement si la substitution vérifie une condition combinatoire simple dite de coïncidences [**Dek78**].

Concernant l'étude des substitutions de longueur non constante, un pas significatif fut de montrer que les fonctions propres des systèmes substitutifs primitifs sont continues ([**Hos86**], voir aussi [**FMN96**]). Ainsi, très opportunément, les deux principales classifications dynamiques que sont la classification par isomorphisme mesurable et celle par isomorphisms topologique sont équivalentes dans le cas des systèmes substitutifs primitifs. De plus, le spectre discret d'un système substitutif se divise en deux parties : la première, d'origine arithmétique, provient de la matrice d'incidence de la substitution ; la seconde, combinatoire, est liée aux mots de retour associés au point fixe de la substitution. Des conditions partielles, certaines suffisantes, d'autres nécessaires, pour qu'un système substitutif soit à spectre discret, ont été obtenues à partir des méthodes développées dans [**Hos86**] (voir [**Hos92, Sol92, Liv92, FMN96**] en particulier).

Pour les substitutions de type Pisot unimodulaires, la partie arithmétique du spectre est entièrement déterminée : étant convenu que les valeur propres seront toujours notées additivement, le spectre arithmétique est engendré par les fréquences d'apparition des lettres dans un point périodique de la substitution [**Hos86**]. On ne connaît pour l'instant aucun exemple de système substitutif de type Pisot dont la partie 'combinatoire' et non 'arithmétique' du spectre est non vide. Le fait que les systèmes substitutifs de type Pisot ne soient ainsi jamais faiblement mélangeants, ajouté à la connaissance de leur spectre, conduit naturellement à s'intéresser en priorité à ces systèmes.

Le cas des substitutions de type Pisot sur deux lettres est maintenant bien compris : d'une part, une condition de coïncidences généralisant celle de [**Dek78**] caractérise les substitutions de ce type qui engendrent un spectre discret [**Hos92, Liv92, HS03**] ; d'autre part toutes les substitutions de type Pisot sur des lettres vérifient cette condition [**BD03**]. Ainsi, tous les systèmes substitutifs de type Pisot sur deux lettres sont-ils à spectre discret.

L'étude des systèmes engendrés par une substitution de type Pisot sur au moins trois lettres a été abordée avec le cas de la substitution de Tribonacci [**Rau82**]. Une partie des résultats concernant cet exemple fondamental sont généralisés dans [**AI01**]. Ainsi, une condition combinatoire de *fortes coïncidences* généralise celle déjà définie sur deux lettres ; cette condition est nécessaire pour qu'un système substitutif de type Pisot soit à spectre discret. Une substitution de type Pisot qui, en plus de vérifier cette condition, est unimodulaire, engendre un système symbolique isomorphe en mesure à un échange de morceaux défini presque partout sur un compact autosimilaire de $\mathbb{R}^{d-1}$ appelé *fractal de Rauzy* de la substitution, où d désigne le cardinal de l'alphabet.

Dans cette situation, le quotient de $\mathbb{R}^{d-1}$ par un réseau donné permet de projeter l'échange de morceaux sur une translation de $\mathbb{T}^{d-1}$ dont le spectre est celui du système substitutif. On réalise ainsi explicitement une projection du système substitutif sur son facteur équicontinu maximal. Une condition suffisante est donnée dans [**AI01**] pour que cette projection soit injective en mesure, c'est-à-dire que le système substitutif soit à spectre discret. Une condition nécessaire et suffisante est obtenue sous forme algorithmique dans [**Sie02**], utilisant une construction alternative du fractal de Rauzy associé à une substitution de type Pisot [**CS01b**], plus proche des travaux originaux de [**Rau82**]. Un survol des résultats cités ci-dessus se trouve dans [**PF02**].

L'étude des systèmes substitutifs se complique pour les systèmes non unimodulaires. Même dans le cas Pisot, le spectre du système n'est alors plus nécessairement de type fini. Par exemple, le système associé à la substitution $1 \mapsto 1112$, $2 \mapsto 12$ est à spectre discret [**HS03**]. Ses valeurs propres s'obtiennent à l'aide des critères donnés dans [**Hos86**] : le spectre est engendré par les $1/\sqrt{2}^n$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, le système substitutif est isomorphe à une translation sur le groupe produit de $\mathbb{Z}_2$ (entiers 2 adiques ; groupe dual du groupe des $k/2^n$) par le 2-solénoïde (limite projective d'une suite de tores par les applications $x \mapsto 2x$; groupe dual des $k\beta/2^n$ lorsque β est irrationnel). Le seul facteur p-adique de ce système est $\mathbb{Z}_2$.

Ceci n'est pas général : le système engendré par la substitution $1 \mapsto 11222$, $2 \mapsto 1222$, est à spectre discret [**HS03**] ; son groupe des valeurs propres n'est pas de type fini (conséquence de [**Hos86**]), mais le système n'admet aucun facteur p-adique. En effet, selon [**Mar73, Hos86**], un système substitutif sur 2 lettres admet pour facteur une translation sur le groupe $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques si et seulement si p divise simultanément le déterminant et la trace de la matrice d'incidence de la substitution, ce qui n'est pas le cas de $1 \mapsto 11222$, $2 \mapsto 1222$. Dans la §3, nous généralisons [**Mar73, Hos86**] en montrant qu'un système substitutif admet un facteur p-adique si et seulement si la matrice d'incidence de la substitution est nilpotente modulo p. La projection du système substitutif sur son facteur p-adique est explicitée.

Dans la §4, nous définissons différentes représentations des systèmes substitutifs. On suppose simplement que la substitution considérée est primitive et que les valeurs propres de sa matrice d'incidence sont algébriquement conjuguées.

On définit d'abord une *représentation géométrique* du système substitutif, à valeurs dans un espace euclidien. Dans le cas unimodulaire de type Pisot, on retrouve la représentation par fractal de Rauzy de [**AI01, CS01b**]. Cette représentation réalise une semi-conjugaison entre le successeur sur le système substitutif et un échange de morceaux. Dans le cas Pisot, et seulement dans ce cas, les vecteurs qui définissent l'échange de morceaux ont un degré de liberté suffisant pour qu'un réseau soit engendré par les différences des vecteurs qui définissent l'échange de morceaux ; lorsqu'on quotiente le fractal de Rauzy par ce réseau, l'échange de morceaux se factorise en une translation torique.

De manière naturelle, nous généralisons à un cadre p-adique (où p est simplement un entier premier) la représentation euclidienne décrite ci-dessus : on définit une *représentation p-adique* du système substitutif dans un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, qui réalise une semi-conjugaison entre le décalage sur le système et un échange de morceaux. La nilpotence de la matrice d'incidence, condition d'existence d'un facteur p-adique établie à la §3, signifie que les vecteurs qui interviennent dans l'échange de morceaux forment une base de l'espace vectoriel ; le facteur p-adique apparaît comme quotient de la représentation p-adique. En ce sens, la nilpotence modulo p est un analogue p-adique du fait qu'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$ admet pour racine un nombre de Pisot.

Dans la §5, on se restreint au cas des substitutions de type Pisot. Les représentations euclidiennes et p-adiques sont rassemblées en une unique *représentation globale*, à valeurs dans un compact, encore nommé *fractal de Rauzy de la substitution* ; ce compact est un sous-ensemble du produit d'un espace euclidien et d'extensions finies de corps p-adiques. Nous montrons que les fractals de Rauzy vérifient un certain nombre des propriétés fondamentales de leurs analogues dans le cas unimodulaire : en particulier, il existe une semi-conjugaison entre le système substitutif et un échange de morceaux sur son fractal de Rauzy. De plus, le fractal de Rauzy est de mesure non nulle pour la mesure de Haar de l'espace produit dans lequel il est défini. Ceci permet de construire une représentation du système substitutif par une translation sur un groupe compact. Plus précisément le résultat suivant est vérifié.

PROPOSITION 1.1. *Tout système substitutif de type Pisot est une extension finie presque partout de son facteur équicontinu maximal.*

Dans la §6, on montre que, comme dans le cas unimodulaire, si la substitution vérifie la condition combinatoire de fortes coïncidences, le fractal de Rauzy a une structure autosimilaire ; une dynamique de translation par morceaux existe sur cet ensemble, et la dynamique symbolique de cet échange de morceaux est le système symbolique engendré par la substitution de départ. On obtient ainsi une représentation explicite des systèmes substitutifs de type Pisot, indépendamment de leur unimodularité.

THÉORÈME 1.2. *Soit σ une substitution de type Pisot sur d lettres, qui vérifie la condition de fortes coïncidences. Soit $\mathbf{M}_\sigma$ la matrice d'incidence de σ et α le valeur propre dominante de $\mathbf{M}_\sigma$. Pour $p \in \mathbb{N}$ premier, on note $D_p = \sum_{i=1}^{k} e(\mathcal{J}_i)$, où $e(\mathcal{J}_i)$ désigne l'incide de ramification de chaque diviseur premier $\mathcal{I}_i$ de l'idéal $\alpha\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$.*

Le système dynamique symbolique (X_σ, S) associé à σ est isomorphe en mesure à un échange de morceaux sur une partie autosimilaire compacte de mesure non nulle dans $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Q}_{p_1}^{D_{p_1}} \times \cdots \times \mathbb{Q}_{p_k}^{D_{p_k}}$, où les p_i sont les diviseurs premiers de $\det \mathbf{M}_\sigma$.

2. *Généralités*

2.1. *Système dynamique substitutif.* Un *système dynamique topologique* est un couple (X, φ) où φ est une application continue du compact X dans lui-même. Un système dynamique (Y, ψ) est appelé *facteur topologique* de (X, φ) s'il existe une application continue surjective f de X dans Y qui réalise une semi-conjugaison entre les applications ψ et φ, c'est-à-dire $f \circ \varphi = \psi \circ f$.

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{A}$. Le mot vide de $\mathcal{A}^*$ est désigné par ε. La longueur d'un mot fini W est notée $|W|$. On appelle *mot infini bilatéral* tout élément w de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On écrit un tel mot $w = \ldots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1\ldots$ en le pointant entre w_{-1} et w_0. L'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est muni du produit des topologies discrètes sur $\mathcal{A}$. Les *cylindres* sont les ensembles :

$$[U.V] = \{(w_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \,;\, w_{-|U|}\ldots w_{-1}w_0\ldots w_{|V|-1} = UV\}, \quad u, v \in \mathcal{A}^*$$

(lorsque U est vide, le cylindre est simplement noté $[V]$). Ils sont ouverts et fermés et forment une base de la topologie de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

On note S le *décalage* sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, qui à tout mot $w = (w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ associe le mot $Sw = (w_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. On appelle *point périodique pour le shift* tout mot w de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tel qu'il existe $\eta \geq 1$ avec $S^\eta(w) = w$.

Le *langage* $\mathcal{L}(w)$ d'un mot infini w est l'ensemble de tous les mots finis qui apparaissent dans w. Ces mots finis sont aussi appelés facteurs de w. Le *système dynamique symbolique* engendré par un mot infini bilatéral u est le couple (X_u, S), où $X_u = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}(x) \subset \mathcal{L}(u)\}$. Notons que l'ensemble $X(u)$ est l'adhérence dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de l'orbite de u sous l'action de S ; il est compact pour la topologie induite par celle de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ et la restriction de S à X_u, encore notée S, est un homéomorphisme. Notons que X_u est fini si et seulement si u est un point périodique pour le shift.

Une *substitution* est un morphisme σ pour la concaténation du monoïde libre $\mathcal{A}^*$, qui envoie $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^+$, et tel qu'il existe une lettre a de $\mathcal{A}$ vérifiant $|\sigma^n(a)| \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. La substitution σ se prolonge de manière naturelle à l'ensemble des mots infinis $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ par :

$$\sigma(\dots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1\dots) = \dots\sigma(w_{-2})\sigma(w_{-1}).\sigma(w_0)\sigma(w_1)\dots$$

Un mot infini u de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un *point périodique* de σ si et seulement s'il existe un entier η non nul vérifiant $\sigma^\eta(u) = u$ et s'il existe une lettre c tel que tout facteur de u est facteur d'un itéré de σ sur c (cette condition assure que les parties de u indicées positivement et négativement sont concaténées naturellement relativement à la substitution).

On note X_{per} l'ensemble des points périodiques de la substitution. Ainsi, X_{per} est l'ensemble des mots w de la forme $w = \lim_{n\to+\infty} \sigma^{\eta n}(b).\sigma^{\eta n}(a)$, où a et b sont deux lettres et η un entier tels que $\sigma^\eta(a)$ commence par a, $\sigma^\eta(b)$ finit par b, et ba est facteur d'un itéré de σ sur une lettre de l'alphabet.

La substitution σ est dite *périodique pour le shift* s'il existe un point périodique de σ qui soit également périodique pour le shift.

Une substitution σ est dite *primitive* s'il existe un entier naturel k tel que $\sigma^k(a)$ contient une occurrence de b pour tout couple $(a, b) \in \mathcal{A}^2$. Si σ est primitive, X_{per} est fini et non vide. Soit u un point périodique de σ, alors X_u ne dépend pas de u : on le note X_σ, et (X_σ, S) est appelé le *système dynamique symbolique* engendré par σ. De même $\mathcal{L}(u)$ ne dépend pas de u, on le note alors $\mathcal{L}(X_\sigma)$. Si la substitution σ est primitive, le système (X_σ, S) est *minimal* : il ne possède pas de fermé invariant par S non trivial. On renvoie à [**Que87**] pour plus de précisions. De plus, le système (X_σ, S) est uniquement ergodique : il existe une seule mesure de probabilité sur X_σ invariante par le décalage S. La mesure d'une cylindre $[W]$, où $W \in \mathcal{L}(u)$, est la fréquence d'apparition de W dans le point périodique u.

2.2. *Codage du système par un système dynamique symbolique de type fini.* Soit σ une substitution primitive et non périodique pour le shift et X_σ le système substitutif associé. Une conséquence des travaux de B. Mossé [**Mos92**] est que tout mot w de X_σ se décompose de manière unique sous la forme $w = S^k(\sigma(y))$, avec $y \in X_\sigma$ et $0 \leq k < |\sigma(y_0)|$, où y_0 est la lettre d'indice 0 de y. Ceci signifie que tout mot du système dynamique s'écrit de manière unique sous la forme

$$w = \dots | \underbrace{\dots}_{\sigma(y_{-1})} | \underbrace{w_{-k} \dots w_{-1}.w_0 \dots w_l}_{\sigma(y_0)} | \underbrace{\dots}_{\sigma(y_1)} | \underbrace{\dots}_{\sigma(y_2)} | \dots$$

avec $\dots y_{-n} \dots y_{-1}.y_0 y_1 \dots y_n \dots$ appartenant à X_σ.

Notons $p = w_{-k} \dots w_{-1}$ le préfixe de $\sigma(y_0)$ de longueur k et s le suffixe $s = w_1 \dots w_l$. Le mot w est alors complètement déterminé par la donnée du mot y et du découpage de $\sigma(y_0)$ sous la forme pw_0s. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble fini de ces décompositions :

$$\mathcal{P} = \{(p, a, s) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^* \,;\, \exists b \in \mathcal{A} \text{ tel que } \sigma(b) = pas\}.$$

Ainsi, pour la substitution $1 \mapsto 1112$, $2 \mapsto 12$, l'ensemble des découpages de préfixes-suffixes associé est

$$\mathcal{P} = \{(\varepsilon, 1, 112), (1, 1, 12), (11, 1, 2), (111, 2, \varepsilon), (\varepsilon, 1, 2), (1, 2, \varepsilon)\}.$$

On appelle *désubstitution* l'application θ sur X_σ qui associe y à w. Le décomposition du mot fini $\sigma(y_0)$ détermine une partition de X_σ indicée $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} &\theta \;: X_\sigma \to X_\sigma, w \mapsto y && \text{tel que } w = S^k\sigma(y) \text{ et } 0 \leq k < |\sigma(y_0)|, \\ &\gamma \;: X_\sigma \to \mathcal{P}, w \mapsto (p, w_0, s) && \text{tel que } \sigma(y_0) = pw_0s \text{ et } k = |p|. \end{aligned}$$

On étudie dans [**CS01a**] les itinéraires des points de X_σ par la désubstitution θ relativement à la partition définie par γ : le *développement en préfixes-suffixes* est l'application $\Gamma \;: X_\sigma \to \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ qui associe à $w \in X_\sigma$ la suite $(\gamma(\theta^i w))_{i \geq 0}$ de $\mathcal{P}^{\mathbb{N}}$. On a ainsi :

$$\Gamma(w) = (\gamma(\theta^i w))_{i \geq 0} = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}.$$

Par exemple, les développements des points de X_σ périodiques pour σ ont tous leurs préfixes p_i vides.

Si $w \in X_\sigma$ est tel que ni les préfixes p_i, ni les suffixes s_i, de son développement $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$, ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang, alors w et $\Gamma(w)$ satisfont la relation :

$$w = \dots \sigma^n(p_n) \dots \sigma(p_1) p_0 . a_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^n(s_n) \dots$$

Ainsi, le développement en préfixes-suffixes peut-être vu comme un développement en séries 'combinatoires' des éléments de X_σ.

Par construction, toute image $\Gamma(w)$ étiquette un chemin de l'automate appelé *automate des préfixes-suffixes*, qui a $\mathcal{A}$ pour ensemble de sommets, $\mathcal{P}$ pour ensemble d'arêtes étiquetées, et tel que l'arête $e = (p, a, s)$ joint le sommet a au sommet b si et seulement si $pas = \sigma(b)$.

On note $X_{\mathcal{P}}$ l'ensemble des étiquettes des chemins infinis de l'automate. La définition de l'automate des préfixes-suffixes implique $X_{\mathcal{P}}$ est un système dynamique symbolique de type fini.

On montre que Γ est un isomorphisme mesurable de X_σ dans $X_{\mathcal{P}}$.

THÉORÈME 2.1. (voir [**CS01a, HZ01**]) *Soit σ une substitution primitive et non périodique pour le shift. L'application Γ définie plus haut est continue surjective dans le système dynamique symbolique de type fini $X_{\mathcal{P}}$. Cette application est injective sur le complémentaire de la réunion des orbites des points périodiques pour σ.*

Par construction, la désubstitution θ est conjuguée via Γ au décalage sur le système dynamique symbolique $X_{\mathcal{P}}$. La substitution σ est conjuguée au prolongement à gauche des éléments de $X_{\mathcal{P}}$ par un élément de $\mathcal{P}$ dont le préfixe est vide. Enfin, le décalage sur X_σ est conjugué à une transformation adique sur $X_{\mathcal{P}}$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

LEMME 2.2. (voir [**CS01a**]) *Soit $w \in X_\sigma$ et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ son développement en préfixes-suffixes. Alors*

- *le développement $\Gamma(\sigma w) = (q_i, b_i, t_i)_{i\geq 0}$ est tel que $q_0 = \varepsilon$ et $q_{i+1} = p_i$ pour $i > 0$;*
- *si $Sw \in X_{\mathrm{per}}$, le développement $\Gamma(Sw) = (r_i, c_i, u_i)_{i\geq 0}$ vérife pour tout n assez grand $\sigma^n(r_n)\ldots\sigma^0(r_0) = \sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)a_0$;*
- *si $Sw \in X_{\mathrm{per}}$, il existe l tel que pour tout n, $\sigma^{nl}(p_{nl})\ldots\sigma(p_1)p_0w_0 = \sigma^{(n_1)l}(w_0)$. De plus, le développement $\Gamma(Sw) = (r_i, c_i, u_i)_{i\geq 0}$ vérife $\sigma^n(r_n)\ldots\sigma^0(r_0) = \varepsilon$.*

2.3. *Abélianisé d'une substitution.* Si σ est une substitution sur d lettres, on note $\mathbf{M}_\sigma$ la *matrice d'incidence de σ*, dont le coefficient (i, j) est le nombre d'occurrences de la lettre i dans $\sigma(j)$. Pour tout mot fini W, on note $\mathbf{l}(W) \in \mathbb{N}^d$ le vecteur ayant pour j-ième coefficient le nombre d'occurrences de la lettre j dans W. La matrice $\mathbf{M}_\sigma$ représente en fait l'application linéaire abélianisée associée à σ :

$$\text{pour tout } W \in \mathcal{A}^* \quad \mathbf{l}(\sigma(W)) = \mathbf{M}_\sigma \mathbf{l}(W).$$

La substitution étant primitive, il existe une puissance de $\mathbf{M}_\sigma$ qui est strictement positive, et le théorème de Perron–Frobenius implique que $\mathbf{M}_\sigma$ admet une valeur propre dominante simple, qui est réelle positive, et un vecteur propre associé à cette valeur propre à coefficients positifs. On note $\alpha = \alpha_1$ la valeur propre dominante ; $\alpha_2\ldots\alpha_d$ les autres valeurs propres.

On ne considère que des substitutions primitives, non périodiques pour le shift, dont le polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Les valeurs propres sont alors toutes distinctes et algébriquement conjuguées entre elles. De plus, le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est une extention galoisienne sur $\mathbb{Q}$. Il existe ainsi pour tout $i \leq d$, un $\mathbb{Q}$-automorphisme τ_i du corps $\mathbb{K}$ qui envoie α_1 sur son conjugué α_i. Ces automorphismes τ_i s'étendent à $\mathbb{K}^d$ et seront notés de la même manière.

Soit $\mathbf{v}_1$ un vecteur propre à gauche de $\mathbf{M}_\sigma$ associé à α_1, à coordonnées dans $\mathbb{Q}(\alpha_1)$. On obtient une famille de vecteurs propres à gauche normalisée en posant $\mathbf{v}_i = \tau_i(\mathbf{v}_1)$. Les vecteurs propres $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ forment une base de $\mathbb{C}^d$. On obtient de la même manière une base de vecteurs propres à droite. On voit facilement que les coordonnées d'un vecteur rationnel dans une telle base sont reliées par les automorphismes τ_i. Ainsi, la décomposition d'un vecteur rationnel non nul dans une base de vecteurs propres a tous ses coefficients non nuls.

On dit que la substitution est *de type Pisot* lorsque les valeurs propres sont toutes non nulles et de module différent de 1, et que seule la valeur propre dominante est de module supérieur à 1. Ceci implique en particulier que le polynôme caractéristique est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et que la substitution est primitive [**CS01b**]. La substitution est *unimodulaire* si le déterminant de sa matrice est de module 1.

On note $\langle\, ,\rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{C}^d$ défini par $\langle \mathbf{e}, \mathbf{f}\rangle = {}^t\,\overline{\mathbf{e}}\mathbf{f}$.

2.4. *Corps p-adiques.* On se référera à [**Ami75, BS66**] pour des détails sur ce paragraphe.

La *valeur absolue p-adique* est définie sur $\mathbb{Q}$ par $|z|_p = p^{-v_p(z)}$, où $v_p(z)$ est la plus grande puissance de p qui apparaît dans la décomposition en facteurs premiers de z. Le *corps des nombres p-adiques* $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique. L'*anneau des entiers p-adiques* $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_p$. Les valuation et valeur absolue p-adique se prolongent sur $\mathbb{Q}_p$ et sont notées de la même manière. Une base de la topologie de $\mathbb{Q}_p$ est formée des boules ouvertes et fermées $x + p^{k+1}\mathbb{Z}_p$, pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Q}_p$.

Un *corps de nombre* $\mathbb{K}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$. On note $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ son *anneau des entiers*. Pour tout $\beta \in \mathbb{K}$, l'exposant d'un idéal premier $\mathcal{I}$ dans la décomposition de l'idéal fractionnaire $\beta\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ en puissances d'idéaux premiers, est notée $v_{\mathcal{I}}(\beta)$. La valeur absolue $\mathcal{I}$-adique sur $\mathbb{K}$ est définie sur $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ par : $|\beta|_{\mathcal{I}} = \text{card}(\mathbb{O}_{\mathbb{K}}/\mathcal{I}^{v_{\mathcal{I}}(\beta)}\mathcal{O}_{\mathbb{Q}})^{-1} = p^{-f(\mathcal{I})v_{\mathcal{I}}(\beta)}$, où $\mathcal{I}$ coupe $\mathbb{Z}$ selon l'idéal premier $p\mathbb{Z}$ et $f(\mathcal{I})$ est le degré résiduel de $\mathcal{I}$: $p^{f(\mathcal{I})} = \text{card}(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$.

Sur $\mathbb{K}$, le théorème d'Ostrowski dit qu'il n'existe que deux classes de valeurs absolues.

- Les valeurs absolues archimédiennes—dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est la valeur absolue usuelle—qui sont de la forme $|x| = |\tau(x)|_{\mathbb{C}}$, où τ est un isomorphisme du corps $\mathbb{K}$ sur un sous-corps de $\mathbb{C}$.
- Les valeurs absolues non archimédiennes, qui sont exactement les valeurs absolues $\mathcal{I}$-adiques pour tous les idéaux $\mathcal{I}$ premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.

Ces différentes topologies vérifient la relation appelée *formule du produit* : le produit de toutes les valeurs absolues d'un élément de $\mathbb{K}$ est égal à 1.

Si $\mathcal{I}$ est un idéal premier, le complété $\tilde{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$ pour la valeur absolue $\mathcal{I}$-adique est une extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré $e(\mathcal{I})f(\mathcal{I})$, où $e(\mathcal{I}) = v_{\mathcal{I}}(p)$ est l'indice de ramification de $\mathcal{I}$.

L'anneau des entiers $\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$ de ce complété admet un seul idéal premier $\tilde{\mathcal{I}}$ qui est principal. Si π est un générateur de cet idéal : $\tilde{\mathcal{I}} = \pi\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$, une base d'ouverts-fermés de $\tilde{\mathbb{K}}$ est formée des ensembles $z + \pi^n\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$, pour $z \in \tilde{\mathbb{K}}$ et $n \in \mathbb{N}$. La mesure $\mu_{\mathcal{I}}$ de Haar sur $\tilde{\mathbb{K}}$ est définie sur la base d'ouverts-fermés par :

$$\mu_{\mathcal{I}}(z + \pi^n\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}) = |\pi|_{\tilde{\mathcal{I}}}^n = p^{-nf(\mathcal{I})}.$$

La norme $\tilde{\mathcal{I}}$-adique vérifie $\text{card}(\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}/z\widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}) = 1/|z|_{\tilde{\mathcal{I}}}$ pour tout $z \in \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}$. Pour tout borélien B de $\tilde{\mathbb{K}}$, la mesure de Haar satisfait la relation :

$$\text{pour tout } z \in \widetilde{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}, \quad \mu_{\mathcal{I}}(zB) = |z|_{\tilde{\mathcal{I}}}\mu_{\mathcal{I}}(B). \tag{2.1}$$

3. *Facteurs p-adiques des substitutions*

3.1. *Spectra rationnel des systèmes substitutifs.* Les mots de retour d'un système substitutif ont été introduits dans [**Dur98, Liv92**]. Etant donné une substitution primitive σ, on dit qu'un élément $W = a_1 \dots a_{k-1} \in \mathcal{L}(X_\sigma)$ est un *mot de retour* de X_σ s'il existe une lettre a_k telle que $a_1 \dots a_{k-1}a_k \in \mathcal{L}(X_\sigma)$ et pour tout n assez grand, $\sigma^n(a_k) = \sigma^n(a_1)$ avec $\sigma^n(a_j) \neq \sigma^n(a_1)$ si $j \neq 1, k$. Grâce à [**Hos86, FMN96**], on caractérise comme suit les facteurs p-adiques des systèmes substitutifs. On note η la plus pette période commune à tous les points de X_σ périodiques pour σ.

PROPOSITION 3.1. *Un système substitutif primitif admet pour facteur (topologique ou métrique) une translation sur un sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si pour tout mot de retour W et tout entier k, p^k divise $|\sigma^{\eta n}(W)|$ pour tout n assez grand.*

Preuve. Supposons qu'il existe une application continue $\varphi : X_\sigma \to \mathbb{Q}_p$ telle que $\varphi \circ S = \varphi + z_0$ sur X_σ. Si u est un point périodique pour σ, l'application φ_1 définie par $\varphi_1(w) = [\varphi(w) - \varphi(u)]/z_0$ est continue et vérifie $\varphi_1 \circ S = \varphi + 1$. L'orbite de u étant dense dans X_σ, $\varphi_1(X_\sigma)$ parcourt $\mathbb{Z}_p$, et $(\mathbb{Z}_p, +1)$ est un facteur topologique de (X_σ, S).

Selon [**Hos86**], les facteurs topologiques et métriques d'un système substitutif primitif sont identiques. Le groupe $\mathbb{Z}_p$ est la limite projective des groupes finis $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Ainsi, l'addition de 1 sur $\mathbb{Z}_p$ est un facteur métrique d'un système dynamique si et seulement si tous les rationnels $1/p^k$ sont valeurs propres métriques, ce qui selon [**FMN96**] est équivalent à la condition sur les mots de retour énoncée. □

Remarque 3.2. La condition sur les mots de retour est équivalente à

$$||\sigma^{\eta n}(W)||_p = |\langle \mathbf{M}_\sigma^{\eta n}\mathbf{l}(W), \mathbf{1}\rangle|_p \underset{n\mapsto\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Une matrice $\mathbf{M}$ de taille d est dite *nilpotente modulo p* si une puissance de cette matrice est nulle dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ceci est équivalent au fait que le polynôme caractérisque de $\mathbf{M}$ est égal à X^d modulo p, i.e. les coefficients non dominants de ce polynôme sont divisibles par p.

COROLLAIRE 3.3. *Si $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p, $(\mathbb{Z}_p, +1)$ est un facteur p-adique de (X_σ, S).*

3.2. *Caractérisation des facteurs p-adiques.* Le raisonnement suivant, dû au rapporteur de cet article, établit la réciproque du Corollaire 3.3. On se référera aussi à [**Dur00**]. Une preuve topologique ne faisant pas intervenir les résultats de [**Hos86, FMN96**] et les mots de retour se trouve dans [**Sie00**].

LEMME 3.4. *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence a un polynôme caractéristique irréducible sur $\mathbb{Q}$. Aucun sous-espace vectoriel propre de $\mathbb{Q}^d$ n'est stable par $\mathbf{M}_\sigma^\eta$.*

Preuve. La matrice $\mathbf{M}_\sigma^\eta$ admet pour valeurs propres les α_i^η. S'il existe deux indices i et j tels que $\alpha_i^\eta = \alpha_j^\eta$, soit τ l'automorphisme du corps $\mathbb{K}$ qui envoie α_i sur α_1. On a alors $\alpha_i^\eta = \tau(\alpha_j)^\eta$. En particulier, les modules de α_1 et $\tau(\alpha_j)$ sont égaux, tandis que $\tau(\alpha_j)$ est valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$ distincte de α_1 par injectivité de τ. Ceci contredit le théorème de

Perron-Frobenius. Les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma^\eta$ sont donc toutes simples. Soit $(\mathbf{u}_i)_{1\le i\le d}$ une famille de vecteurs propres à droite algébriquement normalisée.

Si le polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma^\eta$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$, il existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{Q}^d$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$, avec $d^\circ P < d$, qui vérifient $P(\mathbf{M}_\sigma^\eta)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Les coefficients $(a_i)_{1\le i\le d}$ de $\mathbf{x}$ dans la base $(\mathbf{u}_i)_{1\le i\le d}$ sont tous non nuls. Pour tout i fixé, on a $\big(\prod_{j\neq i}(X - \alpha_j^\eta)P\big)(\mathbf{M}_\sigma^\eta)(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = a_i\big(P\prod_{j\neq i}(X-\alpha_j^\eta)\big)(\mathbf{M}_\sigma^\eta)(\mathbf{u_i})$. Le polynôme $P\prod_{j\neq i}(X-\alpha_j^k)$ appartient donc à l'idéal $(X-\alpha_i^\eta)\mathbb{Z}[X]$ des polynômes qui, appliqués en $\mathbf{M}_\sigma^\eta$ annulent le vecteur propre $\mathbf{u}_i$. P est ainsi de degré au moins d, ce qui est impossible.

Si $\mathbb{Q}^d$ contient un sous-espace vectoriel propre stable par $\mathbf{M}_\sigma^\eta$, le polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma^\eta$ sur un tel sous-espace est un diviseur propre du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma^\eta$ sur $\mathbb{Q}^d$, qui ne serait pas irréductible. □

PROPOSITION 3.5. *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique irréductible sur $\mathbb{Q}$. Soit (X_σ, S) le système dynamique engendré par σ. Soit p un nombre premier.*

- *(X_σ, S) admet pour facteur (topologique ou métrique) une translation sur un sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p.*
- *Si p ne divise pas* $\det \mathbf{M}_\sigma$*, (X_σ, S) n'admet aucune valeur propre rationnelle de la forme $1/p^k$.*

Preuve. Par définition, l'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^d, |\langle \mathbf{M}_\sigma^{\eta n}\mathbf{x}, \mathbf{1}\rangle|_p \to 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^d$ stable par l'action de la matrice $\mathbf{M}_\sigma^\eta$. Si le système substitutif admet un facteur p-adique, selon la Proposition 3.1, ce sous-espace n'est pas réduit au vecteur nul : il contient les linéarisés $\mathbf{l}(W)$ des mots de retour W. Par le Lemme 3.4, il est égal à tout $\mathbb{Q}^d$.

Ainsi, l'ensemble $\{\mathbf{y} \in \mathbb{Q}^d, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^d, |\langle \mathbf{M}_\sigma^{\eta n}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|_p \to 0\}$ n'est pas réduit au vecteur nul. Il s'agit encore d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^d$, stable par le transposée de $\mathbf{M}_\sigma^\eta$. La matrice ${}^t\mathbf{M}_\sigma^\eta$ vérifiant le Lemme 3.4, on obtient :

$$\text{pour tout } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^d, \quad |\langle \mathbf{M}_\sigma^{\eta n}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|_p \to 0.$$

Les coefficients de $\mathbf{M}_\sigma^{\eta n}$ sont donc divisibles par p pour n assez grand et $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p.

Pour montrer la deuxième partie de la proposition, considérons l'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^d, \liminf_{n\to\infty} |\langle \mathbf{M}_\sigma^{\eta n}\mathbf{x}, \mathbf{1}\rangle|_p \ge p^{-k}\}$. Le rationnel $1/p^k$ est valeur propre si et seulement si cet ensemble contient les linéarisés des mots de retours de X_σ. Avec un raisonnement identique au précédent, on en déduit que pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^d$, $\liminf_{n\to\infty} |\langle \mathbf{M}_\sigma^{\eta n}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|_p \ge p^{-k}$. En particulier, les coefficients de $\mathbf{M}_\sigma^{\eta n}$ sont divisibles par p^k pour n assez grand. Or, si p ne divise pas det $\mathbf{M}_\sigma$, cette matrice est inversible dans $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ et une de ses puissances ne peut être nulle modulo p^k. □

COROLLAIRE 3.6. *Un système substitutif dont le polynôme caractéristique est irréductible admet une infinité de valeurs propres rationnelles si et seulement si les coefficients non dominants du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$ ont un facteur commun.*

Preuve. Si les coefficients non dominants du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$ ont un facteur commun, tout diviseur premier de ce facteur commun produit un facteur p-adique et de ce fait une infinité de valeurs propres rationnelles. Réciproquement, si le système a une infinité de valeurs propres rationnelles, les diviseurs premiers de leurs dénominateurs divisent det $\mathbf{M}_\sigma$ et sont donc en nombre fini. Par un rasionnement de type 'lemme des tiroirs', il existe ainsi un nombre premier p tel que tous les $1/p^n$ sont valeurs propres, ce qui est équivalent au fait les coefficients non dominants du polynôme caractéristique de $\mathbf{M}_\sigma$ ont un facteur commun. □

Exemple 3.7. La substitution $1 \mapsto 1112$, $2 \mapsto 12$ admet $\mathbb{Z}_2$ pour seul facteur p-adique. La substitution $1 \mapsto 11222$, $2 \mapsto 1222$ n'admet aucun facteur factuer p-adique, et n'a qu'un nombre fini de valeurs propres rationnelles dont le dénominateur est une puissance de 3.

3.3. *Construction explicite du facteur p-adique.* Les facteurs p-adiques sont réalisés explicitement de la manière suivante.

PROPOSITION 3.8. *Soit σ une substitution primitive dont la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique irréductible. Si $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p, la fonction φ_p suivante est bien définie sur le système substitutif X_σ et réalise une semi-conjugaison topologique entre le décalage sur X_σ et l'addition de 1 dans $\mathbb{Z}_p$:*

$$\text{pour tout } w \in X_\sigma, \quad \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}, \quad \varphi_p(w) = \sum_{i\geq 0} |\sigma^i(p_i)| \in \mathbb{Z}_p.$$

Preuve. La preuve de la Proposition 3.5 montre que si $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p, pour toute lettre a, les longueurs $|\sigma^n(a)|$ tendent vers 0 pour la topologie p-adique. Soit $w \in X_\sigma$ et $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$ son développement en préfixes-suffixes. Puisque chaque longueur $||\sigma^i(p_i)||_p$ est majorée par $\max ||\sigma^i(a)||_p$, la série $\sum_{i\geq 0} |\sigma^i(p_i)|$ converge dans $\mathbb{Z}_p$. Soit $\varphi_p(w)$ sa limite. □

Par continuité de Γ, les développements en préfixes-suffixes de deux mots w_1 et w_2 suffisamment proches dans X_σ ont mêmes débuts de longueur k. Ainsi, $|\varphi_p(w_1) - \varphi_p(w_2)|_p \leq \max_{n>k, a\in\mathcal{A}} ||\sigma_0^n(a)||_p$ tend vers 0 lorsque k grandit et φ_p est continue sur X_σ.

Par le Lemme 2.2, si Sw n'est pas périodique pour σ, le développement $\Gamma(Sw) = (q_i, b_i, t_i)_{i\geq 0}$ vérifie pour tout n assez grand : $|\sigma^n(q_n)\ldots\sigma^0(q_0)| = |\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)| + 1$. Ainsi, $\varphi_p(Sw) = \varphi(w) + 1$.

Si par contre Sw est périodique, le Lemme 2.2 implique que $\varphi(Sw) = 0$ tandis que $|\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)| = |\sigma^n(p_n)\ldots\sigma^0(p_0)w_0| - 1 = |\sigma^{n+1}(w_0)| - 1$, qui tend vers -1 dans $\mathbb{Z}_p$. On a donc bien $\varphi_p \circ S = \varphi_p + 1$ sur X_σ.

Enfin, soit u un point périodique de σ. Par minimalité de X_σ, $\varphi_p(X_\sigma)$ est l'adhérence de l'orbite de $0 = \varphi_p(u)$ par l'addition de 1, c'est-à-dire $\mathbb{Z}_p$. □

4. *Représentations des systèmes substitutifs par des pseudo-échanges de morceaux*

4.1. *Représentation formelle d'un système substitutif.* On considère toujours une substitution σ primitive, non périodique pour le shift, et dont la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique irréductible. Etant donné α une valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$, le terme *représentation formelle de X_σ* désigne l'application qui à $w \in X_\sigma$ associe la série définie comme suit dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, considérée formellement, c'est-à-dire sans s'inquiéter de savoir si elle converge : si $\mathbf{v}_\alpha$ désigne un vecteur propre à gauche pour α de $\mathbf{M}_\sigma$, à coefficients dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, et si $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i$ est le développement en préfixes-suffixes de w, on pose

$$\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}(w) = \sum_{i\geq 0}\langle \mathbf{l}(\sigma^i(p_i)), \mathbf{v}_\alpha\rangle = \sum_{i\geq 0}\langle \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_\alpha\rangle \alpha^i. \tag{4.1}$$

Cette définition ne dépend pas de la valeur propre α choisie : puisque $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ est irréductible, toutes les valeurs propres sont conjuguées et sont donc identiques d'un point de vue formel.

Selon des arguments similaires à ceux de la preuve de la Proposition 3.8, le Lemme 2.2 permet de déterminer l'action du décalage S et de la substitution σ sur $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ lorsque $\mathbb{Q}(\alpha)$ est muni d'une topologie qui fait tendre la suite α^n vers zero.

LEMME 4.1. *Pour toute valeur absolue sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui vaut strictement moins de 1 en α, les relations suivantes sont vérifiées dans le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour la valeur absolue : pour tout $w \in X_\sigma$,*

$$\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}(Sw) = \varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}(w) + \langle \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_\alpha\rangle, \tag{4.2}$$

$$\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\sigma w) = \alpha\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}(w). \tag{4.3}$$

On notera que les nombres $\langle \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_\alpha\rangle$, pour $w_0 \in \mathcal{A}$, sont rationnellement indépendants : dans le cas contraire, il existerait un hyperplan rationnel qui contiendrait les vecteurs propres à gauche obtenus en remplaçant α par tous ses conjugués dans les coordonnées de $\mathbf{v}_\alpha$; la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ ne serait plus diagonalisable [**CS01b**].

4.2. *Représentation géométrique.* Pour faciliter la compréhension de cette section, on renomme par β_i les valeurs propres *contractantes* de $\mathbf{M}_\sigma$, c'est-à-dire celles dont le module est strictement inférieur à 1 : $\beta_1, \ldots, \beta_{c_1}$ sont les valeurs propres réelles de module inférieur à 1 ; $\beta_{c_1+1}, \ldots, \beta_{c_1+c_2}, \beta_{c_1+c_2+1} = \overline{\beta_{c_1+1}}, \ldots, \beta_{c_1+2c_2} = \overline{\beta_{c_1+c_2}}$ sont les valeurs propres complexes de module inférieur à 1.

En particulier, si la substitution est de type Pisot, les β_1 parcourent toutes les valeurs propres non dominantes de $\mathbf{M}_\sigma$ et on a $c_1 + 2c_2 = d - 1$.

Définition de la représentation géométrique. Le choix de la valeur propre α intervient lorsqu'on cherche à donner une valeur à la série formelle $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}(w)$: du fait de sa définition, la série $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}(w)$ converge dans $\mathbb{C}$ dès que $|\alpha| < 1$, c'est-à-dire lorsque $\alpha = \beta_k$, avec $k \leq c_1 + 2c_2$. On définit la représentation φ_{β_k} de X_σ par :

$$\text{si } \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i \quad \text{alors } \varphi_{\beta_k}(w) = \sum_{i\geq 0}\langle \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_{\beta_k}\rangle \beta_k^i.$$

La *représentation géométrique* du système substitutif rassemble ces représentations, en omettant celles qui sont conjuguées dans le plan complexe. Elle contient ainsi toutes les représentations archimédiennes possibles de $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}$. On note $\mathbb{K}_\infty = \mathbb{R}^{c_1} \times \mathbb{C}^{c_2}$. Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $D_\infty = c_1 + 2c_2 \leq d - 1$, soit le nombre valeurs propes contractantes de $\mathbf{M}_\sigma$.

$$\text{pour tout } w \in X_\sigma, \quad \varphi_\infty(w) = (\varphi_{\beta_1}(w), \ldots \varphi\beta_{c_1+c_2}(w)) \in \mathbb{K}_\infty \simeq \mathbb{R}^{D_\infty}. \tag{4.4}$$

Notations.

(i) On note δ_∞ l'injection canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{K}_\infty$:

$$\text{pour tout } P \in \mathbb{Q}[X], \quad \delta_\infty(P(\alpha)) = (P(\beta_1), \dots, P(\beta_{c_1+c_2})) \in \mathbb{R}^{c_1} \times \mathbb{C}^{c_2} = \mathbb{K}_\infty.$$

(ii) Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbb{K}_\infty$, $\mathbf{h}[\mathbf{v}]$ désigne l'action sur $\mathbb{K}_\infty$ de la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de $\mathbf{v}$.

Action de la substitution. Le Lemme 4.1 signifie que la substitution σ agit sur la représentation géométrique comme une matrice diagonale :

$$\varphi_\infty(\sigma w) = \mathbf{h}[\delta_\infty(\alpha)]\varphi_\infty(w).$$

Action du décalage. Selon le Lemme 4.1, on a

$$\varphi_\infty(Sw) = \varphi_\infty(w) + \delta_\infty(\langle \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_\alpha \rangle).$$

On appelle *pseudo-échange de morceaux* d'une partie X d'un groupe la donnée d'un recouvrement fini de $X = \bigcup X_i$ et de translations f_1 définies sur X_i et à valeurs dans X. En particulier, un pseudo-échange de morceaux engendre un pseudo-groupe de translations. Si les X_i forment une partition de X, le pseudo-échange de morceaux est une translation par morceaux.

Le décalage sur X_σ agit ainsi sur $\varphi_\infty(X_\infty) = \bigcup \varphi_\infty([i])$ comme un pseudo-échange de morceaux $\mathcal{T}_\infty$, défini sur chaque $\varphi_\infty([i])$ par la translation de vecteur $\delta_\infty(\langle \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_\alpha \rangle)$.

Dimension maximale. La dimension D_∞ est la plus grande possible (c'est-à-dire $d-1$) si la substitution est de type Pisot. La représentation φ_∞ de tels système substitutifs est étudiée dans [**AI01, CS01b**]. En particulier, il est montré que la dimension D_∞ est alors suffisamment grande pour que les différences des vecteurs qui définissent $\mathcal{T}_\infty$ engendrent un sous-groupe fermé propre discret de $\mathbb{K}_\infty$, c'est-à-dire un réseau. Ceci permet de projeter $\mathbb{K}_\infty$ dans le tore $\mathbb{T}^{d-1}$ et de factoriser l'échange de morceaux en une translation. On montre ainsi que tout système substitutif de type Pisot sur d lettres admet pour facteur une translation minimale sur le tore $\mathbb{T}^{d-1}$.

Nous verrons dans la section suivante pourquoi la condition '$\mathbf{M}_\sigma$ nilpotente modulo p' joue un rôle similaire à celui de la condition Pisot pour l'obtention de facteurs equicontinus.

Exemples. De multiples exemples dans le cas unimodulaire de type Pisot sont donnés dans [**Rau82, AI01, CS01b**]. Dans la Figure 1 sont présentés les fractals de Rauzy associés à la substitution de Tribonacci ($1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 13$, $3 \mapsto 1$), et aux substitutions définies par : $1 \mapsto 12$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 31$; $1 \mapsto 112, 2 \mapsto 31$, $3 \mapsto 1$; $1 \mapsto 123, 2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 31$; et $1 \mapsto 131, 2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 1132$. Chaque fractal de Rauzy se découpe en trois sous-ensembles correspondant à chaque lettre, représentés par trois couleurs distinctes. Nous verrons plus loin que pour ces exemples de substitutions, les trois sous-ensembles sont disjoints en mesure.

La substitution $1 \mapsto 1111222233$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 12$, est de type Pisot mais non unimodulaire (son polynôme caractéristique est $X^3 - 4X^2 - 6X - 2$). Contrairement au cas unimodulaire, dans la représentation géométrique donnée Figure 2 les sous-ensembles correspondant à chaque lettre ne semblent pas être disjoints en mesure. Nous allons voir

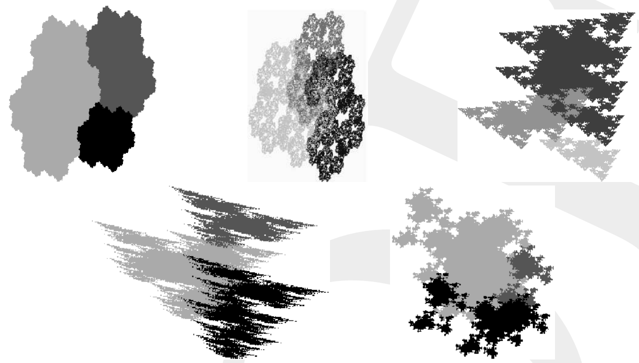

FIGURE 1. Représentations géométriques de substitutions de type Pisot unimodulaires.

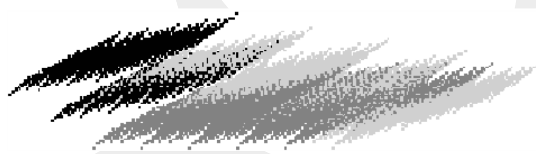

FIGURE 2. Représentations géométrique d'une substitutions de type Pisot non unimodulaire.

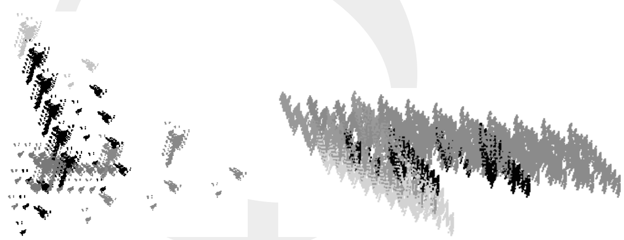

FIGURE 3. Représentations géométriques de substitutions qui ne sont pas de type Pisot.

dans les sections suivantes qu'une représentation arithmétique de cette substitution couplée avec la représentation géométrique permet de séparer en mesure la représentation des cylindres de X_σ.

La substitution $1 \mapsto 1122222344$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 1122223444$, $4 \mapsto 21$ admet pour polynôme caractéristique $X^4 - 3X^3 - 7X^2 - 2X - 1$. Elle admet deux valeurs propres complexes conjuguées de module strictement inférieur à 1, et deux valeurs propres réelles de module strictement supérieur à 1. Elle n'est donc pas de type Pisot, et sa représentation géométrique est de dimension 2 (voir Figure 3). Bien que cette substitution soit unimodulaire, les sous-ensembles correspondants à chaque lettre de l'alphabet semblent avoir une intersection de mesure non nulle.

La substitution $1 \mapsto 112222222223$, $2 \mapsto 34$, $3 \mapsto 4$, $4 \mapsto 112222222233$ a $X^4 - 2X^3 - 10X^2 - 8X - 2$ pour polynôme caractéristique, irréductible sur $\mathbb{Q}$. Elle n'est ni

Pisot, ni unimodulaire ; sa représentation géométrique est de dimension 2 (voir Figure 3). On notera que les sous-ensembles correspondant à chaque lettre de l'alphabet semblent encore avoir une intersection de mesure non nulle.

Ainsi, hors du cas Pisot, les représentations définies dans cet article ne sont pas assez précises. Pour cette raison, on se limitera dans les dernières sections au cas Pisot.

4.3. *Représentation p-adique.* La représentation φ_∞ contient toutes les valeurs finies que prend la série formelle $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ pour les topologies sur $\mathbb{Q}(\alpha)$ qui complètent ce corps en un espace vectoriel réel, c'est-à-dire pour les topologies archimédiennes sur $\mathbb{Q}(\alpha)$. Cependant, le corps $\mathbb{Q}(\alpha)$ peut aussi être muni des topologies non archimédiennes que sont les topologies ultramétriques, associées aux idéaux $\mathcal{I}$ premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$. Ceci permet de définir comme suit de nouvelles représentations.

Définition de la représentation p-adique. Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$. La série $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ converge pour la topologie $\mathcal{I}$-adique si et seulement si $\alpha \in \mathcal{I}$. Si tel est le cas, on note $\widetilde{\mathbb{K}_\mathcal{I}}$ le complété de $\mathbb{Q}(\alpha)$ pour cette topologie. Soit $p_\mathcal{I}$ l'unique nombre premier contenu dans $\mathcal{I}$. Le corps $\widetilde{\mathbb{K}_\mathcal{I}}$ est un $\mathbb{Q}_{p_\mathcal{I}}$-espace vectoriel de dimension $e(\mathcal{I})$ (puisque $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}/\mathcal{I} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, i.e. $f(\mathcal{I}) = 1$). La représentation $\mathcal{I}$-adique de X_σ est le plongement de la représentation formelle $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ dans $\widetilde{\mathbb{K}_\mathcal{I}}$:

$$\text{si } \Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_i \quad \text{alors } \varphi_\mathcal{I}(w) = \sum_{i\geq 0} \langle \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_{\beta_k}\rangle \alpha^i \in \widetilde{\mathbb{K}_\mathcal{I}}.$$

Pour tout nombre premier p, on regroupe dans une seule application les représentations qui sont à valeurs dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Décomposons l'idéal $\alpha\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ en idéaux premiers, pour obtenir les idéaux premiers qui contiennent simultanément α et p. En particulier, le nombre de tels idéaux parmi les k possibles (qui interviennent dans la décomposition de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$) est désigné par l:

$$\alpha\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \prod_{i=1}^{l} \mathcal{I}_i^{n_i}.$$

On note $\mathbb{K}_p = \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_1}} \times \cdots \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_l}}$. Il s'agit d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $D_p = \sum_{i=1}^{l} e(\mathcal{I}_i) = \sum_{i=1}^{l} v_{\mathcal{I}_i}(p)$. La *représentation p-adique* du système dynamique X_σ est définie par :

$$\text{pour tout } w \in X_\sigma, \quad \varphi_p(w) = (\varphi_{\mathcal{I}_1}(w), \ldots, \varphi_{\mathcal{I}_l}(w)) \in \mathbb{K}_p \simeq \mathbb{Q}_p^{D_p}. \tag{4.5}$$

Exemples. Considérons la substitution $1 \mapsto 1112$, $2 \mapsto 12$. Le polynôme caractéristique de sa matrice est $X^2 - 4X + 2$, et on a $\alpha = 2 + \sqrt{2}$. L'idéal $2\mathbb{Z}$ est ramifié dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$; plus précisément $2\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = \mathcal{I}^2$. Ainsi, il n'existe qu'un idéal qui contient α et $p = 2$; son incide de ramification est 2. En particulier $D_2 = 2$.

Le polynôme caractéristique de la matrice de la substitution $1 \mapsto 11222$, $2 \mapsto 1222$ est $X^2 - 5X + 3$. On a alors $\alpha = (5 + \sqrt{13})/2$. L'idéal $3\mathbb{Z}$ est décomposé dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$; plus précisément $3\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{13})} = \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2$ avec $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I}_2$. Le nombre α n'appartient qu'à un des deux idéaux, aussi la représentation 3-adique de la substitution est-elle de dimension 1 : $D_3 = 1$.

Dimension D_p. La représentation p-adique est non triviale si et seulement si $\alpha\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ est non trivial, c'est-à-dire si au moins un idéal premier apparaît dans sa décomposition.

LEMME 4.2. *Soit θ un entier algébrique de polynôme minimal π. Les diviseurs premiers de $\pi(0)$ sont exactement les nombres premiers p pour lesquels il existe un idéal premier $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ qui contient simultanément θ et p.*

Preuve. Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier et $p \in \mathcal{I}$, i.e., $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. On sait que $\pi(0)/\theta \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ puisqu'il s'agit du produit des conjugués de θ. Si $\theta \in \mathcal{I}$, on a donc $\pi(0) \in \theta\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)} \cap \mathbb{Z} \subset \mathcal{I} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, et p divise $\pi(0)$.

Réciproquement, soit p un diviseur de $\pi(0)$, et $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ au dessus de p, où $\mathbb{K}$ est le corps de décomposition de π. Puisque $\pi(0) \in p\mathbb{Z} \subset \mathcal{I}$, l'idéal $\mathcal{I}$ contient un conjugué θ_1 de θ. Si τ désigne un automorphisme de $\mathbb{K}$ qui envoie θ_1 sur θ, l'ensemble $\tau(\mathcal{I}_1) \cap \mathbb{Q}(\theta)$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ qui contient p et θ. □

COROLLAIRE 4.3. *La représentation p-adique de X_σ est non triviale, i.e. $D_p \neq 0$, si et seulement si p divise $\det \mathbf{M}_\sigma$.*

Comme D_∞, la dimension D_p est limitée par le nombre de lettres de l'alphabet.

LEMME 4.4. *On a : $D_p \leq d$.*

Preuve. L'idéal $p\mathbb{Z}$ étant premier dans $\mathbb{Z}$, la décomposition $p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \prod_{j=1}^{k} \mathcal{J}_j^{e_j}$ vérifie $\sum_{i=1}^{k} e(\mathcal{J}_j) f(\mathcal{J}_j) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = d$. Tout idéal premier $\mathcal{I}_i$ qui contient p et α est un des idéaux $\mathcal{J}_i$. Ainsi, $\sum_{i=1}^{l} e(\mathcal{I}_i) f(\mathcal{I}_i) \leq \sum_{j=1}^{k} e(\mathcal{J}_j) f(\mathcal{J}_j) = d$. □

Action du décalage et de la substitution. On note δ_p l'injection canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{K}_p$: $\delta_p(x) = (x, \ldots, x) \in \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_1}} \times \cdots \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_l}} = \mathbb{K}_p$; pour tout vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{K}_p$, on note $\mathbf{h}[\mathbf{v}]$ l'action diagonale sur $\mathbb{K}_p$ définie par $\mathbf{v}$.

En appliquant l'injection canonique aux résultats du Lemme 4.1, on obtient, comme pour la représentation euclidienne, que la substitution σ agit sur φ_p comme une matrice diagonale et le décalage comme un pseudo-échange de morceaux $\mathcal{T}_p$, défini sur chaque $\varphi_p([i])$ par la translation de vecteur $\delta_p(\langle \mathbf{1}(w_0), \mathbf{v}_\alpha \rangle)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \varphi_p(Sw) &= \varphi_p(w) + \delta_p(\langle \mathbf{1}(w_0), \mathbf{v}_\alpha \rangle) \\ \varphi_p(\sigma w) &= \mathbf{h}[\delta_p(\alpha)]\varphi_p(w). \end{aligned}$$

4.4. *Représentation de dimension maximale.* Dans le lemme suivant, on retrouve la condition de nilpotence modulo p mise en évidence §3, exprimée en termes de maximalité de la dimension D_p.

LEMME 4.5. *Soit σ une substitution dont la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $D_p = d$;
(2) *tout idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ qui contient p contient aussi α ;*
(3) $\mathbf{M}_\sigma$ *est nilpotente modulo p ;*

Preuve.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Selon la preuve du Lemme 4.4, $D_p = d$ si et seulement si les idéaux qui divisent $p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ sont aussi des diviseurs de $a\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} + p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$.

(3) $\Leftrightarrow$ (2) Si $\mathbb{K}$ est une extension de $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{I}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ au dessus de $p\mathbb{Z}$, la matrice $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p si et seulement si elle est nilpotente modulo $\mathcal{I}$. Dans ce cas toute valeur propre de $\mathbf{M}_\sigma$ contenue dans $\mathbb{K}$ appartient nécessairement à $\mathcal{I}$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Par conjugaison, toute valeur propre ρ appartient à tout idéal premier de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ contenant p. Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier contenant p dans l'anneau des entiers du corps de décomposition de $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$. Pour toute valeur propre ρ, $\mathcal{I}$ est au dessus d'un idéal premier de $\mathbb{Q}(\rho)$ qui contient p donc ρ (par hypothèse). Puisque $\mathcal{I}$ contient toutes les valeurs propres de $\mathbf{M}_\sigma$, cette matrice est nilpotente modulo $\mathcal{I}$ et donc modulo p. □

Lorsque cette condition est vérifiée, $\mathbb{K}_p$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace-vectoriel de dimension d ; l'injection canonique δ_p envoie toute $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\alpha)$ sur une $\mathbb{Q}_p$-base de $\mathbb{K}_p$ (voir, par exemple, [**BS66**, Ch. 4, §2, Théorème 1]). Les facteurs p-adiques du système substitutif (X_σ, S) apparaissent alors comme quotient sur un groupe le la représentation p-adique φ_p.

PROPOSITION 4.6. *Soit σ une substitution primitive dont la matrice d'incidence a un polynôme caractéristique $\chi_{\mathbf{M}_\sigma}$ irréductible sur $\mathbb{Q}$. Si $\mathbf{M}_\sigma$ est nilpotente modulo p, il existe une projection J de $\mathbb{K}_p$ sur $\mathbb{Q}_p$ telle que l'application φ_p se projette sur la translation par 1 :*

$$\text{pour tout } w \in X_\sigma, \quad J \circ \varphi_p(Sw) = J \circ \varphi_p(w) + 1.$$

Preuve. Les vecteurs $\delta_p(\langle \mathbf{l}(1), \mathbf{v}_\alpha\rangle), [\delta_p(\langle \mathbf{l}(2), \mathbf{v}_\alpha\rangle) - \delta_p(\langle \mathbf{l}(1), \mathbf{v}_\alpha\rangle)], \ldots, [\delta_p(\langle \mathbf{l}(d), \mathbf{v}_\alpha\rangle) - \delta_p(\langle \mathbf{l}(1), \mathbf{v}_\alpha\rangle)]$ forment une $\mathbb{Q}_p$-base de $\mathbb{K}_p$. Soit $J : \mathbb{K}_p \to \mathbb{Q}_p$ la projection sur la première coordonnée dans cette base. On a pour tout $i \le d$, $J(\delta_p(\langle \mathbf{l}(i), \mathbf{v}_\alpha\rangle) = 1$. Ainsi pour tout $w \in X_\sigma$, $J \circ \varphi_p(Sw) = J \circ \varphi_p(w) + 1$. □

Ainsi, un système substitutif pour lequel $\mathbf{M}_\sigma$ *est nilpotente modulo* p admet pour facteur une translation p-adique qui s'obtient comme quotient d'un pseudo-échange de morceaux sur un $\mathbb{Q}_p$ espace vectoriel : la condition de nilpotence signifie que le degré de liberté des vecteurs définissant le pseudo-échange de morceaux est important, ce qui permet de quotienter l'espace par projection sur une des coordonnées.

On peut rapprocher ceci du cas euclidien : un système substitutif de type Pisot admet pour facteur topologique une translation torique qui s'obtient comme quotient d'un pseudo échange de morceaux sur un espace euclidien, puisque la condition Pisot signifie que le degré de liberté des vecteurs définissant le pseudo-échange de morceaux est suffisamment grand et autorise un quotient [**CS01b**].

Du point de vue des facteurs de translation, la nilpotente modulo p apparaît ainsi comme l'analogue p-adique du fait de la condition Pisot.

Exemples. Trois des substitutions déjà vues en exemple :
- $1 \mapsto 1112, 2 \mapsto 12$,
- $1 \mapsto 1111222233, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 12$,
- $1 \mapsto 112222222223, 2 \mapsto 34, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 112222222233$,

admettent une représentation 2-adique maximale, c'est-à-dire respectivement de dimensions 2, 3 et 4 sur $\mathbb{Q}_2$.

FIGURE 4. Représentations arithmétiques de deux substitutions de dimension D_2 maximale.

Lorsque la représentation est maximale, il est simple de calculer les coordonnées des points de la représentation arithmétique dans la $\mathbb{Q}_2$-base $\delta_2(\langle \mathbf{l}(1), \mathbf{v}_\alpha\rangle), [\delta_2(\langle \mathbf{l}(2), \mathbf{v}_\alpha\rangle) - \delta_2(\langle \mathbf{l}(1), \mathbf{v}_\alpha\rangle)], \ldots, [\delta_2(\langle \mathbf{l}(d), \mathbf{v}_\alpha\rangle) - \delta_2(\langle \mathbf{l}(1), \mathbf{v}_\alpha\rangle)]$ (pour $d = 2, 3, 4$ suivant la substitution).

On représente $\mathbb{Z}_2$ en plongeant cet ensemble dans $[0, 1]$ par l'application $x = \sum_{i\geq 0} x_i 2^i \in \mathbb{Z}_2 \mapsto x = \sum_{i\geq 0} x_i 2^{-i-1} \in [0, 1]$. Cette application préserve la mesure mais pas la topologie. Les représentation arithmétiques obtenues pour les deux premières substitutions ci-dessus sont présentées à la Figure 4.

Pour la substitution $1 \mapsto 1112$, $2 \mapsto 12$, la représentation arithmétique semble couvrir $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. La partie correspondant au cylindre [1] (en clair) recouvre elle-même $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, tandis que le partie correspondant au cylindre [2] (foncée) semble recouvrir $(1+2\mathbb{Z}_2)\times\mathbb{Z}_2$ (le rectangle droit de la représentation). Ceci est cohérent dans la mesure où les rangs d'apparition de la lettre 2 dans les éléments du système ont même parité. On notera en particulier que les intersections des images des deux clyindres [1] et [2] snot manifestement non vides.

La représentation arithmétique de la substitution $1 \mapsto 1111222233$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 12$ est de dimension 3 sur $\mathbb{Q}_2$. Visuellement, l'image de chaque cylindre semble se décomposer en deux parties : la première partie (en bas à gauche, en bas au fond ou en haut au fond) est isolée des images des deux autres cylindres ; la second partie (en bas à droite) est mélangée avec les images des autres cylindres. Nous allons voir dans la section suivante que la représentation géométrique de cette substitution permet de séparer les parties où les images de cylindres s'intersectent.

5. *Fractals de Rauzy pour des substitutions non unimodulaires*

Lorsque la substitution est de type Pisot et unimodulaire, Arnoux et Ito [**AI01**] ont montré que condition combinatoire dite de *fortes coïncidences* est suffisante pour que la représentation géométrique φ_∞ soit une bonne représentation du système substitutif : sous ces hypothèses, ce qui était visible sur les représentations exposées Figure 1 est prouvé dans [**AI01, CS01b**]. Ainsi :

- les images des cylindres $\varphi_\infty([i])$ sont disjointes en mesure et le pseudo-échange de morceaux $\mathcal{T}_\infty$ est défini presque-partout sur $\varphi_\infty(X_\sigma)$;

- $\varphi_\infty(X_\sigma)$ est un compact autosimilaire de mesure non nulle dans $\mathbb{K}_\infty$, appelé *fractal de Rauzy de la substitution* ;
- le système substitutif est isomorphe en mesure à l'action de $\mathcal{T}_\infty$ dans ce fractal de Rauzy.

Nous allons montrer que les représentations p-adiques définies à la section précédente permettent de généraliser ces résultats au cas non unimodulaire.

5.1. *Fractal de Rauzy.* Soit σ une substitution de type Pisot ; $p_1, \ldots, p_k$ sont les diviseurs premiers de $\det \mathbf{M}_\sigma$.

On regroupe dans une même application la représentation géométrique φ_∞ et les diverses représentations p-adiques φ_p. On obtient ainsi une application qui rassemble toutes les valeurs finies que peut prendre la représentation formelle $\varphi_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ de la substitution pour les différentes topologies existant sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Plus précisément, soit $a\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)} = \prod_{j=1}^m \mathcal{I}_j^{n_j}$ la décomposition de α en idéaux premiers, regroupés en fonction de l'unique nombre premier qu'ils contiennent. Soit $\mathbb{K}_\sigma$ l'ensemble :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}_\sigma &= \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \times \mathbb{K}_{p_1} \times \cdots \times \mathbb{K}_{p_k}\\ &= \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_1}} \times \cdots \times \widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_n}} \simeq \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{Q}_{p_1}^{D_{p_1}} \times \cdots \times \mathbb{Q}_{p_k}^{D_{p_k}}.\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{K}_\sigma$ est normé par la norme sup des normes sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ et $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_1}}$. La mesure de Haar sur $\mathbb{K}_\sigma$ est notée $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}$, produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ et des mesures de Haar sur les corps $\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}$.

La *représentation globale* du système dynamique (X_σ, S) est la fonction

$$\varphi = (\varphi_\infty, \varphi_{p_1}, \ldots, \varphi_{p_k}) \; : X_\sigma \to \mathbb{K}_\sigma.$$

Le *fractal de Rauzy de la substitution* est l'image $\mathcal{R} = \varphi(X_\sigma)$ de φ.

Pour $i \leq d$, on note $\mathcal{R}^i = \varphi([i])$ l'image du cylindre $[i]$ de X_σ. Ces ensembles sont appelés *cylindres* du fractal de Rauzy.

Exemple. Le fractal de Rauzy de $1 \mapsto 1112, 2 \mapsto 12$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}_2 \times \mathbb{Q}_2 \times \mathbb{R}$. Dans une base bien choisie, on obtient la représentation de la Figure 5. En particulier, la représentation réelle (sur l'axe des côtes) permet de séparer les images des cylindres [1] et [2], ce que ne permettait pas la représentation 2-adique (voir Figure 4).

5.2. *Dynamique de décalage sur la représentation globale.* On note δ l'injection canonique de $\mathbb{Q}(\alpha)$ dans $\mathbb{K}_\sigma$: $\delta = (\delta_\infty, \delta_{p_1}, \ldots, \delta_{p_k})$.

Cette injection appliquée aux formules du Lemme 4.1 permet encore de déterminer l'action du décalage sur le fractal de Rauzy : on note $\eta_i = \delta(\langle \mathbf{l}(i), \mathbf{v}_\alpha \rangle)$ pour toute lettre i. On a pour tout $w \in X_\sigma$.

$$\varphi(Sw) = \varphi(w) + \delta(\langle \mathbf{l}(w_0), \mathbf{v}_\alpha \rangle) = \varphi(w) + \eta_{w_0}. \tag{5.1}$$

Ainsi, φ réalise une semi-conjugaison entre le décalage sur X_σ et le pseudo-échange de morceaux $\mathcal{T}$ défini sur $\mathcal{R} = \bigcup_{i \leq d} \mathcal{R}^i$ par

$$x \in \mathcal{R}^i \Longrightarrow \mathcal{T}(x) = x + \eta_i. \tag{5.2}$$

April 7, 2003 Earlyview proof Ref: P112/24760o Sheet number 20

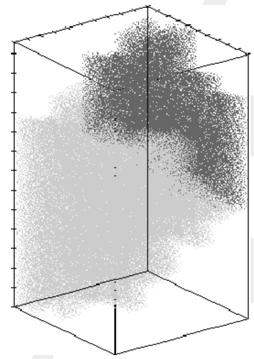

FIGURE 5. Fractal de Rauzy d'une substitution non unimodulaire.

Exemple 5.1. Soit σ_0 la substitution $1 \mapsto 1112$ et $2 \mapsto 12$. La représentation globale φ, est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$. Le décalage S sur X_{σ_0} devient la pseudo-translation par morceaux :

$$\varphi(Sw) = \begin{cases} \varphi(w) + (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}), & \text{si } w_0 = 1 \\ \varphi(w) + (1,1), & \text{si } w_0 = 2. \end{cases}$$

Soit J la surjection $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$ dans $\mathbb{T} \times \mathbb{Q}_2$ définie par : $J((a, b + c\sqrt{2})) - (a\sqrt{2} \bmod 1, b)$. Alors $J(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) = (\sqrt{2}, 1) = J(1,1)$. De ce fait, $J \circ \varphi$ est une application de X_{σ_0} à valeur dans $\mathbb{T} \times \mathbb{Q}_2$, nulle en 0, qui vérifie l'équation fonctionnelle : $f(Sw) = f(w) + (2+\sqrt{2}, 1)$. On retrouve ainsi le facteur torique de X_{σ_0} et son facteur 2-adique.

Le pseudo-échange $\mathcal{T}$ n'est pas une application puisque non défini sur les intersections des $\mathcal{R}^i$. Nous verrons §6 que la condition combinatoire de forte coïncidences assure que les intersections des $\mathcal{R}^i$ sont de mesure nulle pour la mesure de Haar de $\mathbb{K}_\sigma$.

5.3. *Dynamique de la substitution sur la représentation globale.* L'action de la substitution σ se déduit du Lemme 4.1 :

$$\varphi(\sigma w) = \mathbf{h}[\delta(\alpha)]\varphi(w).$$

La notation $\mathbf{h}[\delta(\alpha)]\varphi(w)$ désigne l'élément de $\mathbb{K}_\sigma$ dont les coordonnées sont le produit des coordonnées correspondantes de $\delta(\alpha)$ et $\varphi(w)$. Vectoriellement, il s'agit de l'action sur $\varphi(w)$ de la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les coefficients de $\delta(\alpha)$.

L'action de $\mathbf{h}[\delta(\alpha)]$ sur la mesure de Haar de $\mathbb{K}_\sigma$ est déterminée dans le lemme suivant.

LEMME 5.2. *Pour tout borélien B de $\mathbb{K}_\sigma$* : $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\mathbf{h}[\delta(\alpha)]B) = (1/\alpha)\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(B)$.

Preuve. La formule est vraie si elle est vérifiée pour tous les pavés de $\mathbb{K}_\sigma$. Si les $\mathcal{I}_j$, pour $j = 1 \ldots n$, sont les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ qui contiennent α, on note π_j un générateur de chaque idéal $\tilde{\mathcal{I}}_j$ premier dans $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}$. Tout pavé de $\mathbb{K}_\sigma$ est de la forme :

$$B = \prod_{i=2}^{r+s} [a_i, b_i] \times \prod_{j=1}^{n} (c_j + \pi_j^{n_j} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}).$$

L'image de ce pavé par $\mathbf{h}[\delta(\alpha)]$ est le pavé :

$$\prod_{i=2}^{r+s} [\alpha_i a_i, \alpha_i b_i] \times \prod_{j=1}^{n} (\alpha c_j + \alpha \pi_j^{n_j} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}).$$

Soit μ_σ la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{C}^s$ et $\mu_{\mathcal{I}_j}$ la mesure de Haar sur $\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}$. On a

$$\mu_\infty \left(\prod_{i=2}^{r+s} [\alpha_i a_i, \alpha_i b_i] \right) = \prod_{2}^{r} \alpha_i \prod_{r+1}^{r+s} \alpha_i \tilde{\alpha_i} \quad \mu_\infty \left(\prod_{i=2}^{r+s} [a_i, b_i] \right)$$
$$\mu_{\mathcal{I}_j} (\alpha c_j + \alpha \pi_j^{n_j} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}) = |\alpha|_{\widetilde{\mathcal{I}_j}} \; \mu_{\mathcal{I}_j} (c_j + \pi_j^{n_j} \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{K}_{\mathcal{I}_j}}}).$$

Puisque la norme $\tilde{\mathcal{I}}_j$-adique prolonge la norme $\mathcal{I}_j$-adique, on a $|\alpha|_{\widetilde{\mathcal{I}_j}} = |\alpha|_{\mathcal{I}_j}$. De plus, les seuls idéaux $\mathcal{I}$ pour lesquels la norme $\mathcal{I}$-adique de α est distincte de 1 sont les idéaux $\mathcal{I}_j$. La formule du produit établit donc que $\alpha \prod_2^r \alpha_i \prod_{r+1}^{r+s} \alpha_i \bar{\alpha_i} \prod_1^n |\alpha|_{\mathcal{I}_j} = 1$. Ce qui permet de conclure. □

5.4. *Mesure du fractal de Rauzy dans $\mathbb{K}_\sigma$.* Dans cette partie, on utilise le Lemme 5.2 pour montrer que le fractal de Rauzy est de mesure non nulle pour la mesure de Haar de $\mathbb{K}_\sigma$. La preuve que nous donnons est une généralisation des arguments de [**SW02**] au contexte p-adique.

LEMME 5.3. *Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ fini. L'ensemble $\{\delta(P(1/\alpha)), P \in \mathcal{S}[X]\}$ est discret dans $\mathbb{K}_\sigma$: il existe une constante A qui minore la distance entre deux éléments quelconques distincts de cet ensemble.*

Preuve. Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{S}[X]$ tels que $P_1(1/\alpha) \neq P_2(1/\alpha)$. Selon la formule du produit, on a :

$$\prod_{i=1}^{d} \left| P_1\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) - P_2\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \right|_{\mathbb{C}} \prod_{\mathcal{I}_{\text{premier}}} \left| P_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) - P_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right|_{\mathcal{I}} = 1.$$

Puisque $\mathcal{S}$ est fini et $\alpha_1 = \alpha$ est la valeur propre dominante de $\mathbf{M}_\sigma$, on a :

$$\left| P_1\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) - P_2\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \right|_{\mathbb{R}} \leq 2 \frac{|\alpha|_{\mathbb{R}}}{1 - |\alpha|_{\mathbb{R}}} \max\{|s|_{\mathbb{R}}, s \in \mathcal{S}\} = C_\infty.$$

Si $\alpha \notin \mathcal{I}$ premier, on a $|\alpha|_{\mathcal{I}} \geq 1$, ce qui implique :

$$\left| P_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) - P_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right|_{\mathcal{I}} \leq \max\{|s|_{\mathcal{I}}, s \in \mathcal{S}\} = C_{\mathcal{I}}.$$

Notons que $C_{\mathcal{I}}$ n'est distinct de 1 que pour un nombre fini d'idéaux. Si $C = C_\infty \prod_{\alpha \notin \mathcal{I}} C_{\mathcal{I}}$, on obtient :

$$\prod_{i=2}^{d} \left| P_1\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) - P_2\left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \right|_{\mathbb{C}} \prod_{\alpha \in \mathcal{I}_{\text{premier}}} \left| P_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) - P_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right|_{\mathcal{I}} \geq 1/C.$$

Si n est le nombre d'idéaux premiers qui contiennent α, la norme sup sur $\mathbb{K}_\sigma$ est ainsi minorée :

$$\left\| \delta\left(P_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) - \delta\left(P_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)\right\|_{\mathbb{K}_\sigma} \geq C^{-1/(d-1+n)} = A. \qquad \square$$

LEMME 5.4. *Soit u un point périodique pour σ et $N \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{E}_N = \mathbf{h}[\delta(\alpha^{-N})]\{\varphi(S^n u), 0 \leq n < |\sigma^N(u_0)|\} \subset \mathbb{K}_\sigma$. Il existe deux constantes L et C telles que :*

- *pour tout N, $\alpha^{-N} \operatorname{card} \mathcal{E}_N \geq L > 0$;*
- *la distance entre deux points quelconques de l'union des $\mathcal{E}_N$ est supérieure à C.*

Preuve. Selon la formule (5.1), $\varphi(S^n u) = \sum_{i<n} \delta(\langle \mathbf{l}(u_i), \mathbf{v}_\alpha\rangle)$. Les quantités $\langle \mathbf{l}(a), \mathbf{v}_\alpha\rangle$, pour $a \in \mathcal{A}$, étant rationnellement indépendantes dans $\mathbb{Q}(\alpha)$, les points $\varphi(S^n u)$ sont tous distincts et $\mathcal{E}$ contient $|\sigma^N(u_0)|$ points.

On a $|\sigma^N(u_0)| = \langle \mathbf{1}, \mathbf{M}_\sigma^N \mathbf{l}(u_0)\rangle = \langle {}^t\mathbf{M}_\sigma^N \mathbf{1}, \mathbf{l}(u_0)\rangle$. On décompose le vecteur $\mathbf{1}$ dans une base de vecteur propres à gauche $\mathbf{v}_{\alpha_i}$ de $\mathbf{M}_\sigma$: $\mathbf{1} = \sum \lambda_i \mathbf{v}_{\alpha_i}$. On a alors $\lim_N \alpha^{-N}|\sigma^N(u_0)| = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{l}(u_0)\rangle$. Or $\mathbf{1}$ et $\mathbf{l}(u_0)$ sont des vectuers rationnels. Leurs coordonnées dans une base de vecteurs propres sont donc non nulles. Ainsi, $\lim_N \alpha^{-N} \operatorname{card} \mathcal{E}_N > 0$ ce qui assure l'existence de L.

Si $n < |\sigma^N(u_0)|$, le développement $\Gamma(S^n u) = (p_i, a_i, s_i)_{i\geq 0}$ de $S^n u$ en préfixes-suffixes vérifie $p_i = \varepsilon$ pour tout $i \geq N$. La définition de φ devient donc : $\varphi(S^n u) = \delta\big(\sum_{i<N} \alpha^i \langle \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_\alpha\rangle\big)$. Ainsi $\mathbf{h}[\delta(\alpha^{-N})]\varphi(S^n u) = \delta\big(\sum_{i<N} \alpha^{i-N} \langle \mathbf{l}(p_i), \mathbf{v}_\alpha\rangle\big)$. On conclut en appliquant le Lemme 5.3 à $\mathcal{S}\{\langle \mathbf{l}(p), \mathbf{v}_\alpha\rangle, (p, a, s) \in \mathcal{P}\}$. $\square$

THÉORÈME 5.5. *Soit σ une substitution de type Pisot. Le fractal de Rauzy de σ, $\mathcal{R} = \varphi(X_\sigma) \subset \mathbb{K}_\sigma$, est de mesure non nulle pour la mesure de Haar de $\mathbb{K}_\sigma$.*

Preuve. En reprenant les notations du Lemme 5.4, pour tout N fixé, l'ensemble $\mathcal{B}_N = \bigcup_{z \in \mathcal{E}_N} \mathbf{h}[\delta(\alpha^N)]B(z, C/2)$ est l'union disjointe d'au moins $L\alpha^N$ boules contractées par $\mathbf{h}[\delta(\alpha^N)]$. Selon le Lemme 5.2, la mesure dans $\mathbb{K}_\sigma$ de chaque boule contractée $\mathbf{h}[\delta(\alpha^N)]B(z, C/2)$ vaut $\alpha^{-N}\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(B(0, C/2))$. Ainsi,

$$\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\mathcal{B}_N) \geq L\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(B(0, C/2)) > 0.$$

Par définition, pour tout diamètre d_0, $\mathbf{h}[\delta(\alpha^N)]B(0, d_0)$ est incluse dans la boule $B(0, d_0\varepsilon)$, où $\varepsilon = \max\{|\alpha_i|, |\alpha|_{\mathcal{I}_j}, 2 \leq i \leq r+s, 1 \leq j \leq n\} < 1$. Ainsi, $\mathcal{B}_N$ est contenu dans le voisinage de $\mathcal{R}$ constitué des points à distance inférieure à $\varepsilon_N = C\varepsilon^N/2$ d'un point de $\mathcal{R}$, de plus en plus proche de $\mathcal{R}$ lorsque N croît. L'intersection $\bigcap_N \mathcal{B}_N$ est donc contenue dans le fractal de Rauzy, et est de mesure non nulle. $\square$

5.5. *Mesure induite sur $\mathbb{K}_\sigma$ par la représentation globale.* Une conséquence du fait que le fractal de Rauzy est de mesure non nulle dans $\mathbb{K}_\sigma$ est la suivante.

PROPOSITION 5.6. *La mesure image par φ de la mesure sur X_σ invariante par le décalage S est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de $\mathbb{K}_\sigma$.*

Preuve. Le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ est contenu dans le sous-groupe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathbb{K}_\sigma$ engendré par les vecteurs η_i, pour $i \in \mathcal{A}$. Le sous-groupe $\mathcal{H}_0$ engendré par les vectuers $\eta_i - \eta_1$ est discret dans $\mathbb{K}_\sigma$, puisque sa projection dans $\mathbb{R}^{d-1}$ est discrète (voir [**CS01b**]). Soit $\mathcal{G} = \mathcal{H}/\mathcal{H}_0$ et π la projection continue de $\mathcal{H}$ sur le groupe quotient $\mathcal{G}$.

La formule (5.1) implique qu'en passant au quotient, S correspond à une translation : $\pi \circ \varphi \circ S = \pi \circ \varphi + \pi\eta_1$ sur X_σ. Ainsi, $\mathcal{G} = \pi \circ \varphi(X_\sigma)$ est compact et ce passage au quotient fournit une translation sur $\mathcal{G}$ par un vecteur engendrant un sous-groupe dense, donc uniquement ergodique. Les fibres étant finies, on obtient que $\varphi(\mu_{X_\sigma})$ est absolument continue par rapport à la mesure de Haar sur $\mathcal{G}$.

Puisque le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ est de mesure non nulle pour la mesure de Haar de $\mathbb{K}_\sigma$, $\mathcal{H}$ est de mesure non nulle dans $\mathbb{K}_\sigma$ et la mesure de Haar sur $\mathcal{G}$ est équivalente à la mesure image par π de $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}$. Ainsi, $\varphi(\mu_{X_\sigma})$ est absolument continue par rapport à $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}$. □

On défínti ainsi une projection continue du système substitutif (X_σ, S) sur une translation sur un groupe compact. Nous allons voir que cette projection est à fibres finies presque partout. Dans la section 6, nous en déduirons que la condition combinatoire de fortes coïncidences est suffisante pour que la représentation de X_σ dans le fractal de Rauzy soit injective en mesure.

Par primitivité, on sait que les cylindres de X_σ se partitionnent sous la forme

$$[i] = \bigcup_{j\in\mathcal{A}, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} S^{|p|}\sigma[j] \quad \text{union disjointe.}$$

En appliquant φ à cette décomposition, la formule (5.1) implique que les cylindres du fractal de Rauzy définis par $\mathcal{R}^i = \varphi([i])$ vérifient :

$$\mathcal{R}^i = \bigcup_{\substack{j\in\mathcal{A} \\ \exists p,s,\, pis=\sigma(j)}} \left(\varphi(\sigma[j]) + \sum_{k<|p|} \eta_{\sigma(j)_k}\right). \tag{5.3}$$

PROPOSITION 5.7. *La représentation globale est injective presque partout sur les cylindres de X_σ : il existe un ensemble $\mathcal{N} \cup X_\sigma$ de mesure nulle tel que*

$$\textit{pour tout } i \in \mathcal{A},\ w_1, w_2 \in [i]\backslash\mathcal{N} \quad \varphi(w_1) = \varphi(w_2) \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_2.$$

Preuve. Soit $\mathbf{u} = (\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\mathcal{R}^i))_{i\in\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^d$. En appliquant la mesure $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}$ aux relations exprimées à la formule (5.3), et en utilisant le Lemme 5.2, on montre que $\mathbf{M}_\sigma\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}$ est un vecteur à coordonnées positives :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\mathcal{R}^i) &\leq \sum_{(p,j,s),\, pis=\sigma(j)} \mu_{\mathbb{K}_\sigma}\left(\varphi(\sigma[j]) + \sum_{k<|p|} \eta_{\sigma(j)_k}\right) \\ &= \sum_{J\in\mathcal{A}} (\mathbf{M}_\sigma)_{i,j}\, \mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\mathcal{R}^j)/\alpha. \end{aligned}$$

Par le théorème de Perron–Frobenius, $\mathbf{u}$ ne peut-être qu'un vecteur propre dominant de $\mathbf{M}_\sigma$, non nul par le Théorème 5.5. En particulier, dans les relations de la formule (5.3), les unions sont disjointes en mesure : $\mathcal{R}^i = \bigcup_{j\leq d, \exists p,s,\, pis=\sigma(j)} \varphi(S^{|p|}\sigma[j])$. L'ensemble

$$\mathcal{N}_i = \bigcup_{\substack{j_1\neq j_2 \text{ ou } (p_1,i,s_1)\neq(p_2,i,s_2) \\ \sigma(j_1)=p_1 i s_1, \sigma(j_2)=p_2 i s_2}} \varphi(S^{|p_1|}\sigma[j_1]) \cap \varphi(S^{|p_2|}\sigma[j_2])$$

est donc de mesure nulle dans $\mathbb{K}_\sigma$.

Selon la Proposition 5.6, la préimage par φ de chaque $\mathcal{N}_i$ est de mesure nulle dans X_σ. Soit $\mathcal{N}_0$ l'orbite dénombrable des points périodiques pour σ dans X_σ. L'ensemble suivant est lui aussi de mesure nulle dans X_σ

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \cup \bigcup_{i\in\mathcal{A}, k\geq 0, n<|\sigma^k(i)|} S^n \sigma^k \varphi^{-1}(\mathcal{N}_i).$$

En utilisant l'opération de désubstitution et le fait que le développement en préfixes-suffixes est injectif sauf sur $\mathcal{N}_0$, on obtient que φ est injective sur $[i]\backslash\mathcal{N}$ (voir aussi [**CS01b**, Proposition 4.4]). □

COROLLAIRE 5.8. *Si σ est une substitution de type Pisot, la measure image par la représentation globale φ de la mesure μ_{X_σ} sur les cylindres de X_σ est proportionnelle à la mesure produit $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}$ sur $\mathcal{R}$: la constante $C_{\text{glob}} = \mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\mathcal{R})$ est telle que pour tout borélien B contenu dans un cylindre $[i]$ de X_σ, on a :*

$$\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\varphi(B)) = C_{\text{glob}}\mu_{X_\sigma}(B).$$

Preuve. La famille de partitions de X_σ définies par $\mathcal{P}_k = \{S^n\sigma^k[a]\ ;\ n \in \mathbb{N}, a \in \mathcal{A}, n < |\sigma^k(a)|\}$, est génératrice de X_σ en mesure [**CS01a**]. Il suffit dont de prouver l'égalité c–dessus pour les boréliens $B = S^n\sigma^k[a]$. On obtienne cette égalité en utilisant la preuve de la Proposition 5.7, ainsi que la Lemme 5.2 (voir aussi [**CS01b**, Proposition 4.3]). □

La Proposition 1.1 annoncée en introduction se déduit directement des résultant précédents.

Preuve de la Proposition 1.1. La projection de X_σ sur $\mathcal{R}$ est injective presque partout sur les cylindres. La projection de $\mathcal{R}$ sur le groupe quotient $\mathcal{G}$ est à fibre finies, par compacité de $\mathcal{R}$. On a ainsi obtenu une projection continue à fibres finies presque partout de (X_σ, S) sur une translation sur le groupe compact $\mathcal{G}$. □

6. *Substitutions avec coïncidences*

La condition de coïncidences a été introduite par F. M. Dekking [**Dek78**] pour les substitutions de longueur constante. Pour de telles substitutions, elle est équivalente au fait que le système engendré par la substitution est à spectre discret. Plus généralement, on dit qu'une substitution de longueur non constante vérifie la *condition de fortes coïncidences sur les préfixes* si pour tout couple de lettres (j_1, j_2), il existe n tel que $\sigma^n(j_1)$ et $\sigma^n(j_2)$ se décomposent comme suit :

$$\sigma^n(j_1) = p_1 i s_1 \quad \text{et} \quad \sigma^n(j_2) = p_2 i s_2, \quad \text{avec } \mathbf{l}(p_1) = \mathbf{l}(p_2).$$

On définit de même la condition de fortes coïncidences sur les suffixes.

Notons que les substitutions de type Pisot sur deux lettres vérifient toutes la condition de coïncidences [**BD03**], et plus généralement qu'on ne connaît pas de substitution de type Pisot qui ne vérifie pas la condition de fortes coïncidences sur les préfixes ou sur les suffixes.

En particulier, toutes les substitutions données précédemment en exemple sont à coïncidences.

Arnoux et Ito ont montré dans [**AI01**] que sous cette condition, les cylindres du fractal de Rauzy d'une substitution de type Pisot et unimodulaire s'intersectent sur un ensemble de mesure nulle. Une preuve de ce résultat utilisant les développements en préfixes-suffixes se trouve dans [**CS01b**]. Les résultats suivant montrent que les arguments de [**CS01b**] sont encore valables dans le cas non unimodulaire.

PROPOSITION 6.1. *Les cylindres $\mathcal{R}^a$ du fractal de Rauzy d'une substitution de type Pisot avec coïncidences sont disjoints en mesure : pour tout couple de lettres (b_1, b_2),*

$$\mu_{\mathbb{K}_\sigma}(\mathcal{R}^{b_1} \cap \mathcal{R}^{b_2}) = \mu_{X_\sigma}(\varphi^{-1}(\mathcal{R}^{b_1} \cap \mathcal{R}^{b_2})) = 0.$$

Preuve. La condition de coïncidence sur les préfixes signifie que pour tout couple de lettres b_1, b_2, il existe une lettre a et un entier n tels que $\varphi(\sigma^l[b_1]) + \sum_{m<|p|} \eta_{\sigma^l}(b_1)_m$ et $\varphi(\sigma^l[b_2]) + \sum_{m<|q|} \eta_{\sigma^l}(b_2)_m$ apparaissent dans la partition de $\varphi[a]$ et sont donc disjoints en mesure. On a de plus $\sum_{m<|p|} \eta_{\sigma^l}(b_1)_m = \sum_{m<|q|} \eta_{\sigma^l}(b_2)_m$, ce qui implique que l'intersection de $\varphi(\sigma^l[b_1]) = \mathbf{h}[\delta(\alpha^l)]\mathcal{R}^{b_1}$ et $\varphi(\sigma^l[b_2]) = \mathbf{h}[\delta(\alpha^l)]\mathcal{R}^{b_2}$ est de mesure nulle pour la mesure $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}$. En appliquant $\mathbf{h}[\delta(\alpha^l)]^{-1}$, on obtient que l'intersection cylindres $\mathcal{R}^{b_1}$ et $\mathcal{R}^{b_2}$ est de mesure nulle pour $\mu_{\mathbb{K}_\sigma}$, donc pour la mesure $\varphi(\mu_{X_\sigma})$ selon la Proposition 5.6. □

COROLLAIRE 6.2. *Soit σ une substitution de type Pisot avec coïncidences. Le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ est pavé par les ensembles $\mathcal{R}^i$, qui sont autosimilaires au sens de* [**Ken96**].

Preuve. L'ensemble $\mathcal{R}$ est l'union disjointe en mesure des $\mathcal{R}^i$, qui se décomposent eux-mêmes sons la forme

$$\mathcal{R}^i = \bigcup_{j \leq d, \exists p,s, pis=\sigma(j)} \left(\mathbf{h}[(\delta(\alpha)]\mathcal{R}^j + \sum_{k<|p|} \eta_{\sigma(j)_k} \right) \quad \text{presque partout.} \qquad \square$$

COROLLAIRE 6.3. *Soit σ une substitution de type Pisot avec coïncidences. Le représentation φ est un isomorphisme mesurable entre (X_σ, S) et le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ muni d'une translation par morceaux définie presque partout par la formule (5.2).*

Preuve. Ceci se déduit directement des Propositions 5.7, 6.1 et du Corollaire 5.8 qui, sous la condition de coïncidences est vrai sans se restreindre aux cylindres. □

On a ainsi prouvé le Théorème 1.2 annoncé en introduction.

Remarques.

- Dans le cas unimodulaire, si la substitution vérifie une condition combinatoire supplémentaire (absence de cobord non trivial), la translation sur $\mathcal{G}$ n'est rien d'autre que le facteur équicontinu maximal du système ([**Hos92**], voir aussi [**PF02**, Ch. 7]).
- Dans [**Sie02**] est donnée une caractérisation explicite du fait que le système substitutif est isomorphe en mesure à la translation sur $\mathcal{G}$.

Remerciements
L'auteur tient à remercier V. Berthé, P. Arnoux et F. Parreau pour leurs suggestions lors de la rédaction de cet article, ainsi que le rapporteur anonyme pour ses nombreuses et judicieuses remarques qui ont permis à la fois d'améliorer le manuscrit et d'en simplifier les preuves.

REFERENCES

[AI01] P. Arnoux et S. Ito. Pisot substitutions and Rauzy fractals. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **8**(2) (2001), 181–207. Journées Montoises d'Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000).

[Ami75] Y. Amice. *Les nombres p-adiques*. Presses Universitaires de France, Paris, 1975. Préface de Ch. Pisot, Collection SUP : Le Mathématicien, No. 14.

[BD03] M. Barge et B. Diamond. Coincidence for substitutions of Pisot type. *Bull. Soc. Math. France* (2001), to appear.

[PF02] V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit et A. Siegel (Eds.). *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics (Lecture Notes in Mathematics)*. Springer, Berlin, 2002.

[BS66] Z. I. Borevich et I. R. Shafarevich. *Number Theory (Pure and Applied Mathematics, 20)*. Academic Press, New York, 1966.

[CS01a] V. Canterini et A. Siegel. Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive. *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13**(2) (2001), 353–369.

[CS01b] V. Canterini et A. Siegel. Geometric representation of substitutions of Pisot type. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353**(12) (2001), 5121–5144.

[Dek78] F. M. Dekking. The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length. *Z. Wahrs. Verw. Gebiete* **41**(3) (1977/78), 221–239.

[Dur98] F. Durand. A characterization of substitutive sequences using return words. *Discrete Math.* **179**(1–3) (1998), 89–101.

[Dur00] F. Durand. Linearly recurrent subshifts have a finite number of non-periodic subshift factors. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **20**(4) (2000), 1061–1078.

[FMN96] S. Ferenczi, C. Mauduit et A. Nogueira. Substitution dynamical systems : algebraic characterization of eigenvalues. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29**(4) (1996), 519–533.

[Hos86] B. Host. Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **6**(4) (1986), 529–540.

[Hos92] B. Host. Représentation géométrique des substitutions sur 2 lettres. Unpublished manuscript, 1992.

[HS03] M. Hollander et B. Solomyak. Two-symbol pisot substitutions have pure discrete spectrum. *Preprint*, 2001.

[HZ01] C. Holton et L. Q. Zamboni. Directed graphs and substitutions. *Theory Comput. Syst.* **34**(6) (2001), 545–564.

[Kam72] T. Kamae. A topological invariant of substitution minimal sets. *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972), 285–306.

[Ken96] R. Kenyon. The construction of self-similar tilings. *Geom. Funct. Anal.* **6**(3) (1996), 471–488.

[Liv92] A. N. Livshits. Some examples of adic transformations and automorphisms of substitutions. *Selecta Math. Soviet.* **11**(1) (1992), 83–104.

[Mar73] J. C. Martin. Minimal flows arising from substitutions of non-constant length. *Math. Syst. Theory* **7** (1973), 73–82.

[Mos92] B. Mossé. Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution. *Theoret. Comput. Sci.* **99**(2) (1992), 327–334.

[Que87] M. Queffélec. *Substitution Dynamical Systems—Spectral Analysis (Lecture Notes in Mathematics, 1294).* Springer, Berlin, 1987.

[Rau82] G. Rauzy. Nombres algébriques et substitutions. *Bull. Soc. Math. France* **110**(2) (1982), 147–178.

[Sie00] A. Siegel. Représentation géométrique, combinatoire et arithmétique des substitutions de type Pisot. *PhD Thesis*, Université de la Méditerranée, 2000.

[Sie02] A. Siegel. Pure discrete spectrum dynamical system and periodic tiling associated with a substitution. *Preprint*, 2002.

[Sol92] B. Solomyak. On the spectral theory of adic transformations. *Representation Theory and Dynamical Systems.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, pp. 217–230.

[SW02] V. F. Sirvent et Y. Wang. Self-affine tiling via substitution dynamical systems and Rauzy fractals. *Pacific J. Math.* **206**(2) (2002), 465–485.