Ensembles de formules équivalents pour la circonscription

Yves Moinard
IRISA, Campus de Beaulieu
35042 RENNES-Cedex FRANCE
tél.: (33) 2 99 84 73 13
courriel: moinard@irisa.fr

Raymond Rolland
IRMAR, Campus de Beaulieu
35042 RENNES-Cedex FRANCE
(33) 2 99 28 60 19
Raymond.Rolland@univ-rennes1.fr

Résumé

La circonscription définit la notion d'exception en termes de logique classique. Nous étudions quand deux ensembles de formules donnent naissance à la même circonscription de formules. Deux équivalences doivent être considérées: la simple (deux ensembles fournissent la même circonscription) et la forte (l'équivalence est préservée par réunion de chacun des deux ensembles initiaux avec un même ensemble arbitraire). L'équivalence forte correspond au fait d'avoir la même fermeture pour "et" et pour "ou". L'étude de ces deux équivalences est exhaustive dans le cas propositionnel. Même pour l'équivalence simple, nous démontrons qu'il existe toujours un plus grand ensemble équivalent à un ensemble donné, et nous fournissons un critère d'équivalence, qui devient purement syntaxique dans le cas où on part d'une circonscription ordinaire. Cette étude conduit à introduire deux versions (plus une pour le cas infini) de "formules positives pour un ensemble de formules donné", associées à ces deux équivalences.

Abstract

Circumscription is a way to define exceptions inside classical logic. We describe when two sets of formulas give the same formula circumscription. Two equivalences are interesting: the ordinary one (two sets give the same circumscription) and the strong one (when completed by any arbitrary set, the two sets give the same circumscription). The strong equivalence corresponds to having the same closure for logical "and" and "or". Our study is exhaustive in the propositional case. Even for the ordinary equivalence, we show that there exists always a greatest set equivalent to a given set, and we provide a criterion for detecting equivalences, criterion which is purely syntactical when we start from an ordinary circumscription. This gives rise to various notions of "formulas positive with respect to a given set of formulas".

Mots clé:

Représentation de connaissances
Démonstration automatique

1 Introduction

La circonscription définit la notion d'exceptions en termes de logique classique. Il est souvent préférable d'utiliser la version appelée circonscription de formules. Un aspect important de la circonscription de formules n'a pratiquement pas été étudié: quand exactement deux ensembles de formules donnent-ils naissance à la même circonscription? Répondre à cette question aura d'utiles répercussions sur l'automatisation de la circonscription, et sur la façon de représenter des connaissances en termes de circonscriptions. Une explication possible à cette absence d'étude sur un sujet aussi fondamental est la complexité des circonscriptions de prédicats, qui sont les versions qui ont été introduites d'abord, et qui sont de loin les mieux connues, au moins jusqu'à très récemment. Nous apportons une réponse exhaustive à ce problème, fournissant même une description syntaxique de la plupart des ensembles de formules considérés, en nous restreignant au cas propositionnel. Nous étudions aussi le cas propositionnel infini, afin de faciliter la future résolution de ce problème dans le cas du calcul des prédicats.

La partie 2 introduit la circonscription propositionnelle. La partie 3 décrit deux sortes d'équivalence entre ensembles de formules à circonscrire, ainsi que deux notions correspondantes de "formules positives". La partie 4 examine le cas infini. La partie 5 montre que, si on part d'une circonscription ordinaire, les choses demeurent suffisamment simples (même dans le cas infini), pour que l'on puisse décrire facilement les ensembles de formules concernés de façon syntaxique.

2 Circonscription propositionnelle

$\mathbf{L}$ désigne une logique propositionnelle, $V(\mathbf{L})$ étant l'ensemble de ses symboles propositionnels. Comme c'est l'usage, $\mathbf{L}$ désignera également l'ensemble de toutes les formules du langage considéré. Nous admettons des ensembles vides dans une *partition* de $V(\mathbf{L})$.
Les lettres φ, ψ désignent des formules de $\mathbf{L}$ et $\mathcal{T}$,Φ,Ψ désignent des sous-ensembles de $\mathbf{L}$, $\neg\Phi = \{\neg\varphi \ / \ \varphi \in \Phi\}$. L'ensemble des *théories* est noté $\mathbf{T} = \{\mathcal{T}/\mathcal{T} \subseteq \mathbf{L}, \mathcal{T} = Th(\mathcal{T})\}$, où $Th(\mathcal{T}) = \{\varphi/\mathcal{T} \models \varphi\}$.
Les lettres μ, ν désignent des interprétations de $\mathbf{L}$. Nous représentons une interprétation par le sous-ensemble de $V(\mathbf{L})$ qu'elle satisfait: si $V(\mathbf{L}) = \{P,Q,Z\}$ et si $\mu = \{P,Z\}$, alors $Th(\mu) = Th(P \wedge \neg Q \wedge Z)$.
$\mathbf{M} = \mathcal{P}(V(\mathbf{L}))$ désigne l'ensemble de toutes les interprétations de $\mathbf{L}$. Pour tout sous-ensemble $\mathbf{M}'$ de $\mathbf{M}$, on note $Th(\mathbf{M}')$ l'ensemble $\{\varphi \in \mathbf{L} \ / \ \mu \models \varphi$ pour tout $\mu \in \mathbf{M}'\}$. Cet usage ambigu de $\models$ et Th, appliqué à des ensembles de formules ou à des ensembles d'interprétations, est habituel. $\mathbf{M}(\mathcal{T})$ désigne l'ensemble des modèles de $\mathcal{T}$. TC désigne la fermeture topologique classique: si $\mathbf{M}' \subseteq \mathbf{M}$, $TC(\mathbf{M}') = \mathbf{M}(Th(\mathbf{M}'))$.
En général, le terme *formule* désignera le quotient de cette notion par l'équivalence logique: nous écrirons $\varphi = \psi$ pour $\mathbf{M}(\varphi) = \mathbf{M}(\psi)$. Ainsi, si $V(\mathbf{L})$ a $v \in \mathbb{N}$ éléments, $\mathbf{M}$ a $m = 2^v$ éléments, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{T}$ ont 2^m éléments tandis que si $V(\mathbf{L})$ a $\lambda \geq card(\mathbb{N})$ éléments, $\mathbf{L}$ a λ éléments, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{T}$ ont 2^λ éléments. Cette ambiguïté assez habituelle permet de raccourcir certaines formulations et donc de faciliter la lecture. Pour toute formule φ, $V(\varphi)$ désigne l'ensemble des symboles propositionnels figurant dans [une écriture choisie de] φ.

Définitions 2.1 Une *relation de préférence* sur $\mathbf{L}$ est une relation binaire $\prec$ dans $\mathbf{M}$. $\mathbf{M}_\prec(\mathcal{T})$ est l'ensemble de tous les éléments μ de $\mathbf{M}(\mathcal{T})$ *minimaux pour* $\prec$: $\mu \in \mathbf{M}(\mathcal{T})$ et aucun $\nu \in \mathbf{M}(\mathcal{T})$ n'est tel que $\nu \prec \mu$.

L'*inférence préférentielle* $f = f_\prec$ est définie par $f_\prec(\mathcal{T}) = Th(\mathbf{M}_\prec(\mathcal{T}))$, c'à-d $\mathbf{M}(f_\prec(\mathcal{T})) = TC(\mathbf{M}_\prec(\mathcal{T}))$. □

Définition 2.2 $\prec$ est *sainement fondée* (**(sf)** en abrégé) si, pour tout $\mu \in \mathbf{M}(\mathcal{T}) - \mathbf{M}_\prec(\mathcal{T})$, il existe $\nu \in \mathbf{M}_\prec(\mathcal{T})$ tel que $\nu \prec \mu$.

Cette propriété apparaît dans [1] sous le nom "with minimally modelable theories", puis sous divers noms dont "bien fondée" qui contredisait l'usage mathématique, "smooth" [5] et "stoppered" [6].

Propriété 2.1 [folklore]

1. Si $\prec$ est irréflexive et $f_\prec = f_{\prec'}$, alors $\prec = \prec'$.
2. Si $\prec$ est (sf), alors $\prec$ est transitive et irréflexive. Si $V(\mathbf{L})$ est fini, alors $\prec$ est (sf) ssi elle est transitive et irréflexive. □

La circonscription de prédicats [7] a déjà été simplifiée en sa version propositionnelle ([11] est un pionnier trop rarement cité dans ce domaine). Nous pensons que la circonscription propositionnelle est suffisamment riche afin de mener des études fines du comportement de la circonscription, tout en restant suffisamment simple pour permettre à cette étude de progresser de façon significative. On assiste d'ailleurs actuellement à un regain de cette étude [4, 2].

Définition 2.3 [7, 10, 11] ($\mathbf{P}$,$\mathbf{Q}$,$\mathbf{Z}$) est une partition de $V(\mathbf{L})$. La *circonscription de* $\mathbf{P}$*, avec* $\mathbf{Q}$ *fixe et en laissant* $\mathbf{Z}$ *varier*, est l'inférence préférentielle $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = f_{\prec(\mathbf{P},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Z})}$ où
$\mu \prec_{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Z})} \nu$ si $\mathbf{P} \cap \mu \subset \mathbf{P} \cap \nu$ et $\mathbf{Q} \cap \mu = \mathbf{Q} \cap \nu$ (inclusion stricte, aucune condition sur $\mathbf{Z}$).

On définit aussi dans $\mathbf{M}$ la "relation large" associée
$\mu \preceq_{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Z})} \nu$ si $\mathbf{P} \cap \mu \subseteq \mathbf{P} \cap \nu$ et $\mathbf{Q} \cap \mu = \mathbf{Q} \cap \nu$. □

Au lieu de cette circonscription "ordinaire", il est souvent préférable (voir partie 6.2 ci-dessous et [9, parties 7.4, 7.5 et 7.6]) d'utiliser la circonscription de formules, introduite par [7] dans le cas du calcul des prédicats, et dont voici la variante propositionnelle.

Définition 2.4 Φ est un ensemble de formules de $\mathbf{L}$ et $\mathcal{T}$ est un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{L}$. La *circonscription de formules* $CIRCF$ des formules de Φ, se définit ainsi: On introduit un ensemble $\mathbf{P} = \{P_\varphi\}_{\varphi\in\Phi}$ de nouveaux symboles propositionnels tous distincts.
$CIRCF(\Phi)(\mathcal{T}) =$
$CIRC(\mathbf{P}, \emptyset, V(\mathbf{L}))(\mathcal{T} \cup \{\varphi \Leftrightarrow P_\varphi\}_{\varphi\in\Phi}) \cap \mathbf{L}$. □

Propriété 2.2 ([3] pour la version de prédicats)

$$CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q}).$$

(dans $CIRCF$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ sont considérés comme des ensembles de formules.) □

Définitions 2.5 Pour tout μ, on définit l'ensemble de formules $\Phi_\mu = \{\varphi \in \Phi \ / \ \mu \models \varphi\} = Th(\mu) \cap \Phi$.

On définit deux relations binaires dans $\mathbf{M}$:
$\mu \preceq_\Phi \nu$ si $\Phi_\mu \subseteq \Phi_\nu$, et $\mu \prec_\Phi$ si $\Phi_\mu \subset \Phi_\nu$. □

Voici des conséquences immédiates de ces définitions:

Lemme 2.3 1a. $\mu \preceq_\Phi \nu$ ssi
pour tout $\varphi \in \Phi$, si $\mu \models \varphi$ alors $\nu \models \varphi$.
1b. $\mu \prec_\Phi \nu$ ssi $\mu \preceq_\Phi \nu$ et $\nu \not\preceq_\Phi \mu$.

2. Pour tous μ,ν, on a $\mu \preceq_{\{\varphi\}} \nu$ ou $\nu \preceq_{\{\varphi\}} \mu$.
   On n'a jamais $\mu_1 \prec_{\{\varphi\}} \mu_2$ et $\mu_2 \prec_{\{\varphi\}} \mu_3$.

3a. $\mu \preceq_\Phi \nu$ ssi pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $\mu \preceq_{\{\varphi\}} \nu$.

3b. $\mu \prec_\Phi \nu$ ssi pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $\mu \preceq_{\{\varphi\}} \nu$, et il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $\mu \prec_{\{\varphi\}} \nu$.

4. $\prec_\Phi$ et $\preceq_\Phi$ sont transitives, $\prec_\Phi$ est irréflexive (ordre strict) tandis que $\preceq_\Phi$ est réflexive. □

Ainsi, pour connaître $\prec_\Phi$, la relation de préférence associée à $CIRCF(\Phi)$ (voir propriété 2.4 ci-dessous), on a besoin de connaître plus que chacun des $\prec_{\{\varphi\}}$, on doit connaître chacun des $\preceq_{\{\varphi\}}$, une information plus précise (donc a priori plus difficile à obtenir).
Voici une définition alternative de la circonscription de formules (ce résultat bien connu appartient au folklore maintenant, et donner toutes les références précises nécessaires ici serait assez long, voir [9]):

Propriété 2.4 $CIRCF(\Phi) = f_{\prec_\Phi}$. □

Propriété 2.5 [6, `Observation 3.4.11`]
$\prec_\Phi$ (donc également $\prec_{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Z})}$) est (sf). □

3 Équivalences entre ensembles de formules circonscrites

Nous donnons ici les conditions sous lesquelles deux ensembles de formules Φ et Φ' donnent naissance à la même circonscription de formules. Du point de vue de la représentation des connaissances, et aussi d'un point de vue formel, deux sortes d'équivalence doivent être considérées:

Définition 3.1 Soient Φ et Φ' deux ensembles de formules.

1. Φ et Φ' sont *c-équivalents*, noté $\Phi \equiv_c \Phi'$, si $CIRCF(\Phi) = CIRCF(\Phi')$.
2. Φ et Φ' sont *fortement équivalents*, noté $\Phi \equiv_{fc} \Phi'$, si, pour tout ensemble Φ'' de formules, on a $CIRCF(\Phi \cup \Phi'') = CIRCF(\Phi' \cup \Phi'')$. □

Si $\Phi \equiv_{fc} \Phi'$, alors $\Phi \equiv_c \Phi'$. La version forte est utile car, chaque fois que l'on ajoute une nouvelle règle (ou un nouvel "individu" puisqu'on est ici en propositionnel), à notre ensemble de connaissances, cela correspond à l'ajout d'une ou plusieurs formules (par exemple un nouvel oiseau O_i). Si l'on n'a que l'équivalence simple, on peut alors perdre l'équivalence.
Voici de petites définitions utiles (rappelons qu'une formule est assimilée à sa classe d'équivalence):

Définitions 3.2 La $\wedge$-*fermeture de* Φ est l'ensemble $\Phi^\wedge = \{\bigwedge_{\varphi\in\Psi} \varphi /$ pour tout ensemble fini $\Psi \subseteq \Phi\}$.
La $\vee$-*fermeture* $\Phi^\vee$ est définie de façon analogue.
$\top \in \Phi^\wedge$, $\bot \in \Phi^\vee$ $(\Psi = \emptyset)$.
La $\wedge\vee$-*fermeture de* Φ est $\Phi^{\wedge\vee} = (\Phi^\wedge)^\vee = (\Phi^\vee)^\wedge$.
Φ est *fermé pour* $\wedge$ (respectivement *pour* $\vee$, ou *pour* $\wedge$ *et* $\vee$) si $\Phi = \Phi^\wedge$ (respectivement $\Phi^\vee$, ou $\Phi^{\wedge\vee}$). □

Définitions 3.3 Soit $\prec$ une relation binaire dans $\mathbf{M}$ et Φ un ensemble de formules.

1. φ est *accessible pour* $f = f_\prec$ si $\varphi \in f(\mathcal{T}) - \mathcal{T}$ pour au moins une théorie $\mathcal{T}$.
   L'ensemble des formules *inaccessibles pour* f est
   $$I_f = I_\prec = \mathbf{L} - \bigcup_{\mathcal{T}\in\mathbf{T}} (f(\mathcal{T}) - \mathcal{T}).$$
2. L'ensemble des formules *positives pour* $\prec$ est l'ensemble $Pos(\prec)$ des formules φ telles que, si $\mu \models \varphi$ et $\mu \prec \nu$, alors $\nu \models \varphi$.

   Deux cas particuliers importants correspondent aux relations introduites en définition 2.5:

   (a) Si $\prec = \prec_\Phi$, nous appellerons $Pos(\prec_\Phi)$, l'ensemble des *formules positives en* Φ*, pour l'acception étendue.*
   (b) Si $\prec = \preceq_\Phi$, nous appellerons $Pos(\preceq_\Phi)$ l'ensemble des *formules positives en* Φ*, pour l'acception minimale.* □

Un rôle technique des formules inaccessibles pour une circonscription est développé en [8]. Nous montrons maintenant que, dans le cas fini, I_f est le plus grand (pour $\subseteq$) ensemble Ψ tel que $f = CIRCF(\Phi) = CIRCF(\Psi)$ (théorème 3.4-1b ci-dessous).
Conformément à ce que l'on est en droit d'attendre d'un ensemble de " formules positives", $Pos(\prec)$ est toujours fermé pour $\wedge$ et $\vee$:

Propriété 3.1 1. Si $\prec$ est (sf), $Pos(\prec) = I_\prec$.
2. Pour tout $\prec$, $Pos(\prec)$ est fermé pour $\wedge$ et$\vee$.
3. $\Phi \subseteq Pos(\preceq_\Phi) \subseteq Pos(\prec_\Phi)$.
4. $\Phi^{\wedge\vee} = Pos(\preceq_\Phi)$ □

Le point 1 fournit, dans les cas où il s'applique, une définition simple de l'ensemble des formules positives pour $\prec$, directement en termes de la pré-circonscription $f = f_\prec$. Le point 4 fournit une définition syntaxique très simple de l'ensemble des formules positives en Φ, pour l'acception minimale.

Démonstration: 1. [8, Propriété 4.9].
2. et 3. Immédiats. Les deux inclusions en 3 peuvent être strictes (voir aussi la partie 5 ci-dessous pour un exemple moins trivial): Soit $V(\mathbf{L}) \neq \emptyset$ et $\Phi = \emptyset$, $\preceq_\Phi$ est partout vérifié et $\prec_\Phi$ nulle part, donc $Pos(\preceq_\Phi) = \{\top,\bot\}$ et $Pos(\prec_\Phi) = \mathbf{L}$.

4. $\Phi \subseteq Pos(\preceq_\Phi)$ (d'après 3) et $Pos(\preceq_\Phi)$ est fermé pour $\wedge$ et $\vee$ (d'après 2), donc $\Phi^{\wedge\vee} \subseteq Pos(\preceq_\Phi)$.
Nous démontrons maintenant le seul point un peu délicat: $Pos(\preceq_\Phi) \subseteq \Phi^{\wedge\vee}$.
Supposons $\varphi \in Pos(\preceq_\Phi)$. Comme $\{\top,\bot\} \subseteq \Phi^{\wedge\vee}$, on peut supposer qu'il existe μ,ν tels que $\mu \models \varphi,\nu \models \neg\varphi$. Alors, $\Phi_\mu \not\subseteq \Phi_\nu$ d'après les définitions de $\preceq_\Phi$ et de $Pos(\preceq_\Phi)$. À chaque couple (μ,ν) de ce genre, on associe une formule $\varphi_{(\mu,\nu)} \in \Phi_\mu - \Phi_\nu$. Pour tout ν tel que $\nu \models \neg\varphi$, $\{\mathbf{M}(\varphi_{(\mu,\nu)})\}_{\mu\models\varphi}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbf{M}(\varphi)$, lequel est un ensemble fermé donc compact: il existe un sous recouvrement ouvert fini. À chaque tel ν, on associe φ_ν, la disjonction de toutes les formules $\varphi_{(\mu,\nu)}$ apparaissant dans un recouvrement ouvert fini choisi. Comme chaque $\varphi_{(\mu,\nu)}$ est dans Φ, on a $\varphi_\nu \in \Phi^\vee$. On a aussi $\mathbf{M}(\varphi) \subseteq \mathbf{M}(\varphi_\nu)$ et $\nu \notin \mathbf{M}(\varphi_\nu)$, c'à-d $\varphi \models \varphi_\nu$, soit $\neg\varphi_\nu \models \neg\varphi$, et $\nu \models \neg\varphi_\nu$.
$\{\mathbf{M}(\neg\varphi_\nu)\}_{\nu\models\neg\varphi}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbf{M}(\neg\varphi)$, duquel on extrait un sous recouvrement ouvert fini, auquel correspond une disjonction ψ de formules $\neg\varphi_\nu$. Comme chaque φ_ν est dans $\Phi^\vee$, $\psi \in (\neg(\Phi^\vee))^\vee = \neg((\Phi^\vee)^\wedge) = \neg(\Phi^{\wedge\vee})$. On a aussi $\mathbf{M}(\neg\varphi) \subseteq \mathbf{M}(\psi)$, c'à-d $\neg\varphi \models \psi$. ψ est une disjonction de formules $\neg\varphi_\nu$ qui satisfont toutes $\neg\varphi_\nu \models \neg\varphi$, donc $\psi \models \neg\varphi$. Donc $\varphi = \neg\psi$: $\varphi \in \Phi^{\wedge\vee}$. □

Voici maintenant une justification de l'expression que nous avons choisie: " formules positives". Rappelons que si $(\mathbf{P},\mathbf{Z})$ est une partition de $V(\mathbf{L})$, $(\mathbf{P}\cup\mathbf{Z}\cup\neg\mathbf{Z})^{\wedge\vee}$ est l'ensemble des formules *positives en* $\mathbf{P}$ *(au sens traditionnel)*. Il semble aussi naturel d'appeler *positives en* Φ toutes les formules de l'ensemble $\Phi^{\wedge\vee}$, ce qui justifie déjà le nom de l'ensemble $Pos(\preceq_\Phi)$. Il nous semble y avoir aussi de bonnes raisons d'appeler les formules de l'ensemble, généralement plus grand, $Pos(\prec_\Phi)$, *positives en* Φ, en une acception *étendue*. Pour la circonscription propositionnelle ordinaire, nous pouvons être plus précis dans nos commentaires sur ces ensembles, et donc dans nos justifications:

Exemple 3.1 $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\Phi) = f_\prec$, Φ étant l'ensemble de formules $\Phi = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q}$, c'à-d $\prec = \prec_{(\mathbf{P},\,\mathbf{Q},\,\mathbf{Z})} = \prec_\Phi$.
La relation $\preceq = \preceq_{(\mathbf{P},\,\mathbf{Q},\,\mathbf{Z})} = \preceq_\Phi$ sera également utile.

1. $\Phi^{\wedge\vee} = Pos(\preceq) = Pos(\preceq_\Phi)$ est l'ensemble des formules positives en $\mathbf{P}$, au sens traditionnel, et sans élément de $\mathbf{Z}$.
2. Si $\mathbf{Z} = \emptyset$ ou si $\mathbf{P}$ est infini, alors $Pos(\prec) = Pos(\preceq_\Phi) = Pos(\prec_\Phi)$ (théorème 5.1-1c ci-dessous).
3. Si $\mathbf{P}$ est fini et $\mathbf{Z} \neq \emptyset$, l'ensemble $Pos(\prec)$, moins simple, est décrit ci-dessous (théorème 5.1-2). □

Voici deux lemmes faciles, mais utiles:

Lemme 3.2 Si $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \Phi^{\wedge\vee}$, on a $\preceq_\Phi = \preceq_\Psi$, donc a fortiori $\prec_\Phi = \prec_\Psi$, c'à-d $CIRCF(\Phi) = CIRCF(\Psi)$. □

Démonstration: On a $\mu \preceq_{\Phi^{\wedge\vee}} \nu$ si $\mu \preceq_\Phi \nu$ (lemme 2.3-1a). D'après le lemme 2.3-3a, $\mu \preceq_\Phi \nu$ si ($\Phi \subseteq \Psi$ et $\mu \preceq_\Psi \nu$), donc $\mu \preceq_\Phi \nu$ si $\mu \preceq_{\Phi^{\wedge\vee}} \nu$. Cela donne $\preceq_\Phi = \preceq_{\Phi^{\wedge\vee}}$. On a donc $\preceq_\Phi = \preceq_\Psi$ ssi $\preceq_{\Phi^{\wedge\vee}} = \preceq_{\Psi^{\wedge\vee}}$. On a aussi bien sûr, $\Phi^{\wedge\vee} = \Psi^{\wedge\vee}$ si $\Phi \subseteq \Psi \subseteq \Phi^{\wedge\vee}$. □

Lemme 3.3 [4, Observation 15] Si $V(\mathbf{L})$ est fini,
$CIRCF(\Phi) = CIRCF(I_{\prec_\Phi}) = CIRCF(Pos(\prec_\Phi))$. □

Ce résultat est faux dans le cas infini (théorème 4.4 ci-dessous), cependant il s'étend à toute $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z})$ (théorèmes 4.4 et 5.1-3a ci-dessous).

Théorème 3.4 1a. $\Phi \equiv_c \Psi$ ssi $\prec_\Phi = \prec_\Psi$.
Si $\Phi \equiv_c \Psi$, alors $Pos(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Psi)$.

1b. Si $V(\mathbf{L})$ est fini, $\Phi \equiv_c \Psi$ ssi $\prec_\Phi = \prec_\Psi$ ssi $Pos(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Psi)$, de plus $\prec_\Phi = \prec_{Pos(\prec_\Phi)} = \prec_{Pos(\preceq_\Phi)}$ et $Pos(\prec_\Phi)$ est le plus grand (pour $\subseteq$) ensemble Ψ satisfaisant $\Psi \equiv_c \Phi$.

2a. $\Phi \equiv_{fc} \Psi$ ssi $\preceq_\Phi = \preceq_\Psi$ ssi $Pos(\preceq_\Phi) = Pos(\preceq_\Psi)$.
On a aussi $\preceq_\Phi = \preceq_{\Phi^{\wedge\vee}}$, donc $\prec_\Phi = \prec_{\Phi^{\wedge\vee}}$.

2b. $Pos(\preceq_\Phi) = \Phi^{\wedge\vee}$ est le plus grand (pour $\subseteq$) ensemble Ψ satisfaisant $\Psi \equiv_{fc} \Phi$ (cf lemme 3.2).

3. $\Phi \cup \{\varphi\} \equiv_c \Phi$ ssi $\Phi \cup \{\varphi\} \equiv_{fc} \Phi$ ssi $\varphi \in \Phi^{\wedge\vee}$. □

Le point 1 fournit une condition nécessaire, et même suffisante dans le cas fini, pour que deux ensembles de formules fournissent la même circonscription (soient c-équivalents).

Le point 2 fournit dans tous les cas une condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles soient fortement équivalents. Cette condition est très simple: avoir la même fermeture pour $\wedge$ et $\vee$.

Le point 3 montre que si on ajoute les formules une par une, il y a identité entre c-équivalence et équivalence forte: intuitivement, cela provient du fait que dans les cas où on a c-équivalence sans avoir équivalence forte entre un ensemble et un de ses sur-ensembles, il faut que les formules ajoutées du sur-ensemble "s'annulent mutuellement" (c'est une conséquence du lemme 2.3-3 et du point 2 ci-dessus, pour des exemples, voir le théorème 5.1 et l'exemple 5.1 ci-dessous). Une telle annulation mutuelle est bien sûr impossible si les deux ensembles ne diffèrent que par une formule.

Démonstration: 1a. "ssi": Propriétés 2.1 et 2.5.
Si $\prec_\Phi = \prec_\Psi$, on a bien sûr $Pos(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Psi)$ (attention, la réciproque est fausse, voir théorème 4.4).
1b. Premier "ssi", et partie "seulement si" du second

"ssi": 1a.

Second "ssi", partie "si": On suppose ici $Pos(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Psi)$, alors d'après le lemme 3.3, on obtient $\prec_\Phi = \prec_\Psi$.
La maximalité de $Pos(\prec_\Phi)$ vient de $\Phi \subseteq Pos(\prec_\Phi)$, donc, si $\Psi \equiv_c \Phi$, comme $Pos(\prec_\Psi) = Pos(\prec_\Phi)$ d'après 1a, on obtient $\Psi \subseteq Pos(\prec_\Psi)$.
Dans le cas infini, on obtient encore $\prec_\Phi = \prec_{Pos(\preceq_\Phi)} = \prec_{Pos(\prec_\Phi)}$ pour $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z})$ avec $\Phi = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q}$ (théorème 5.1-3a ci-dessous), mais pas nécessairement pour un ensemble infini de formules quelconques Φ (voir l'exemple 4.1 ci-dessous).

2a. Premier "ssi", partie "si": D'après le lemme 2.3-3a, si $\preceq_\Phi = \preceq_\Psi$, alors pour tout Ψ', on a $\preceq_{\Phi\cup\Psi'} = \preceq_{\Psi\cup\Psi'}$.

Premier "ssi", partie "seulement si": On suppose $\preceq_\Phi \neq \preceq_\Psi$. Si $\prec_\Phi \neq \prec_\Psi$, alors $\Phi \not\equiv_c \Psi$ donc $\Phi \not\equiv_{fc} \Psi$. Supposons alors qu'on ait $\prec_\Phi = \prec_\Psi$ et $\preceq_\Phi \neq \preceq_\Psi$. Il existe donc μ et ν tels que, par exemple, $\mu \preceq_\Phi \nu$, $\nu \preceq_\Phi \mu$, et $\mu \not\preceq_\Psi \nu$, $\nu \not\preceq_\Psi \mu$. Comme $\mu \neq \nu$, il existe une formule φ telle que $\mu \models \varphi$,$\nu \not\models \varphi$. On obtient, d'après le lemme 2.3-3b, $\nu \prec_{\Phi\cup\{\varphi\}} \mu$, et donc, puisqu'on a $\nu \not\preceq_\Psi \mu$, on doit avoir $\nu \not\prec_{\Psi\cup\{\varphi\}} \mu$. Cela démontre $\Psi \cup \{\varphi\} \not\equiv_c \Phi \cup \{\varphi\}$, donc $\Psi \not\equiv_{fc} \Phi$.

Second "ssi", partie "seulement si": Si $\preceq_\Phi = \preceq_\Psi$, alors par définition $Pos(\preceq_\Phi) = Pos(\preceq_\Psi)$.

Second "ssi", partie "si": C'est une conséquence de la seconde phrase, démontrée ci-dessous, qui affirme $\preceq_\Phi = \preceq_{\Phi^{\wedge\vee}}$. Donc, si $Pos(\preceq_\Phi) = Pos(\preceq_\Psi)$, c'à-d si $\Phi^{\wedge\vee} = \Psi^{\wedge\vee}$, on obtient $\preceq_\Phi = \preceq_{\Phi^{\wedge\vee}} = \preceq_{\Psi^{\wedge\vee}} = \preceq_\Psi$.

Seconde phrase: D'après le lemme 3.2 et sa démonstration, on a $\preceq_\Phi = \preceq_{\Phi^{\wedge\vee}}$, donc $\prec_\Phi = \prec_{\Phi^{\wedge\vee}}$.

2b. D'après la propriété 3.1-4, on a $Pos(\preceq_\Phi) = \Phi^{\wedge\vee}$. Si $\Psi \equiv_{fc} \Phi$, on a $\Psi^{\wedge\vee} = \Phi^{\wedge\vee}$ d'après le point 2a. Comme $\Psi \subseteq \Psi^{\wedge\vee}$, on obtient $\Psi \subseteq \Phi^{\wedge\vee}$: $\Phi^{\wedge\vee}$ est maximal.

3. Premier "ssi", partie "si": évident.

Premier "ssi", partie "seulement si": Supposons $\Phi \cup \{\varphi\} \equiv_c \Phi$, c'à-d $\prec_{\Phi\cup\{\varphi\}} = \prec_\Phi$. D'après le lemme 2.3-3a, on a ($\mu \preceq_{\{\varphi\}} \nu$ si $\mu \prec_\Phi \nu$). Supposons aussi $\Phi \cup \{\varphi\} \not\equiv_{fc} \Phi$, c'à-d $\preceq_{\Phi\cup\{\varphi\}} \neq \preceq_\Phi$. D'après le lemme 2.3-3b, il existe alors μ, ν tels que $\mu \preceq_\Phi \nu$, $\nu \preceq_\Phi \mu$, $\mu \not\preceq_{\{\varphi\}} \nu$, $\nu \not\preceq_{\{\varphi\}} \mu$, ce qui contredit le lemme 2.3-2.

Second "ssi": On a $\varphi \in \Phi^{\wedge\vee}$ ssi $(\Phi \cup \{\varphi\})^{\wedge\vee} = \Phi^{\wedge\vee}$. Utiliser la propriété 3.1-4 et le point 2a ci-dessus. □

4 Un troisième ensemble

Nous avons maintenant besoin d'un résultat de caractérisation de la circonscription de formules, résultat dont la démonstration complète nécessiterait d'assez longs développements techniques. Nous nous permettons donc de ne donner ici que les principaux résultats qui nous sont utiles, renvoyant le lecteur intéressé par les démonstrations complètes à [9]. Cela va nous permettre de mieux concentrer notre attention sur les conséquences de ce résultat technique en ce qui concerne l'équivalence d'ensembles de formules, et donc sur les rôles joués par différentes sortes de "formules positives". Signalons que le résultat (très partiel) de caractérisation [2, `Théorem 8`] n'est d'aucune utilité pour définir l'ensemble qui doit remplacer $Pos(\prec_\Phi)$ dans le cas infini.

Définitions 4.1 On définit les ensembles $s_\prec(\mu) = \{\nu \ / \ \mu \prec \nu\}$ (successeurs) et $p_\prec(\mu) = \{\nu \ / \ \nu \prec \mu\}$ (prédécesseurs) et la relation d'équivalence $\equiv_\prec$ par:
$\mu \equiv_\prec \nu$ si $s_\prec(\mu) = s_\prec(\nu)$ et $p_\prec(\mu) = p_\prec(\nu)$.
On note $\equiv_\Phi$ pour $\equiv_{\prec_\Phi}$. □

L'exemple suivant montre que dans le cas infini, on ne peut pas toujours prendre $Pos(\prec) = I_\prec$ comme ensemble de formules Φ à circonscrire (cf théorème 3.4-1). On doit donc chercher un autre ensemble, qui sera donné par la définition 4.3 ci-dessous.

Exemple 4.1 $V(\mathbf{L}) = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. $\nu_i = \{P_0,P_1,\cdots,P_i\}$ ($i \in \mathbb{N}$), $\nu = V(\mathbf{L})$, $\mu = \{P_1\}$. On définit la relation de préférence $\prec$ par $\nu \prec \nu_n$ et $\mu \prec \nu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et rien d'autre.
On a $\lim_{i\to\infty} \nu_i = \nu$.
On a alors $\prec = \prec_\Phi$, donc $f_\prec = CIRCF(\Phi)$, où
$\Phi = \{\varphi \in Pos(\prec) \ / \ \mu \models \varphi$ ssi $\nu \models \varphi\}$.

On a ici $s_\prec(\mu) = s_\prec(\nu) = \{\nu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ et
$p_\prec(\mu) = p_\prec(\nu) = \emptyset$, donc $\mu \equiv_\prec \nu$.
Si $\varphi \in (Pos(\prec))_\mu$, alors $s_\prec(\mu) = s_\prec(\nu) \subseteq \mathbf{M}(\varphi)$, d'où $\nu \in \mathbf{M}(\varphi)$. On a donc $(Pos(\prec))_\mu \subseteq (Pos(\prec))_\nu$. De $P_0 \in Pos(\prec)$, $\nu \models P_0$ et de $\mu \not\models P_0$, on déduit $(Pos(\prec))_\nu \subset (Pos(\prec))_\mu$ et $\mu \prec_{Pos(\prec)} \nu$.
Cela montre qu'on a $\prec \neq \prec_{Pos(\prec)}$, c'à-d
$CIRCF(Pos(\prec)) \neq f_\prec = CIRCF(\Phi)$. □

Définition 4.2 $\prec$ étant une relation de préférence, on définit la relation de préférence $\overline{\prec}$ par: $\mu \overline{\prec} \nu$ si pour tous φ, ψ tels que $\mu \models \varphi$ et $\nu \models \psi$, il existe $\mu' \in \mathbf{M}(\varphi)$, $\nu' \in \mathbf{M}(\psi)$ tels que $\mu' \prec \nu'$. □

Remarques 4.1 1. Si $\mu \prec \nu$, alors $\mu \overline{\prec} \nu$ (prendre $\mu' = \mu$ et $\nu' = \nu$).

2. Si $V(\mathbf{L})$ est dénombrable, alors $\mu \overline{\prec} \nu$ ssi il existe deux suites avec $\lim_{i\to\infty} \mu_i = \mu$, $\lim_{i\to\infty} \nu_i = \nu$ et $\mu_i \prec \nu_i$ pour tout i (démonstration facile).

3. Si $V(\mathbf{L})$ est fini, on a $\overline{\prec} = \prec$ (conséquence de 2). □

Propriété 4.1 [9, proposition 6.9]
1. Si $\mu \overline{\prec} \nu$ alors $(Pos(\prec))_\mu \subseteq (Pos(\prec))_\nu$.

2. Si $\mu \overline{\prec_\Phi} \nu$ alors $\mu \prec_\Phi \nu$ ou $\mu \equiv_\Phi \nu$. □

Définition 4.3 L'ensemble des formules *positives pour une relation de préférence* $\prec$ (*acception restreinte*), est: $Pos_r(\prec) = \{\varphi \in Pos(\prec) /$ pour tous μ,ν, si $\mu \,\overline{\prec}\, \nu$, $\mu \not\prec \nu$ et $\nu \models \varphi$, alors $\mu \models \varphi\}$. On appelle $Pos_r(\prec_\Phi)$ l'ensemble des *formules positives en* Φ*, pour l'acception restreinte.* □

Propriété 4.2 [9, proposition 6.11-1]
$Pos_r(\prec) \subseteq Pos(\prec)$.
Si $\mu \,\overline{\prec}\, \nu$ alors $(Pos_r(\prec))_\mu \subseteq (Pos_r(\prec))_\nu$. □

Voici un dernier résultat préliminaire utile:

Propriété 4.3 [9, proposition 6.12]

1. $\Phi \subseteq Pos_r(\prec_\Phi)$.
   $Pos_r(\prec_\Phi)$ est fermé pour $\wedge$ et $\vee$. Donc:
   $Pos(\preceq_\Phi) \subseteq Pos_r(\prec_\Phi) \subseteq Pos(\prec_\Phi)$.

2. Si $V(\mathbf{L})$ est fini, alors $Pos_r(\prec) = Pos(\prec)$, en particulier $Pos_r(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Phi)$. □

Théorème 4.4 [9, proposition 6.16] (Nous espérons avoir fourni assez de préliminaires ici afin de convaincre le lecteur de la plausibilité de ces résultats.)

$f_\prec$ est une circonscription de formules ssi $f_\prec = CIRCF(Pos_r(\prec))$.

De plus, en ce cas, $Pos_r(\prec)$ est le plus grand ensemble (pour $\subseteq$) Φ tel que $CIRCF(\Phi) = f_\prec$.

On a aussi:
$CIRCF(\Phi) = CIRCF(\Psi)$ ssi $Pos_r(\Phi) = Pos_r(\Psi)$.

On peut avoir $Pos(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Psi)$ et $\Phi \not\equiv_c \Psi$. □

Comme on a $Pos(\prec_{Pos(\prec_\Phi)}) = Pos(\prec_\Phi)$, la dernière ligne de ce théorème est démontrée par l'exemple 4.1, dans lequel $Pos(\prec_\Phi) = Pos(\prec)$.
Voici deux exemples d'application de ce théorème.

Exemple 4.2 Dans l'exemple 4.1, on a $\mu \,\overline{\prec}\, \nu$ et $\Phi = Pos_r(\prec)$. □

Exemple 4.3 $V(\mathbf{L})$ est infini, μ_1 et μ_2 sont deux interprétations distinctes, $\mu \prec \nu$ ssi $\mu = \mu_1$ et $\nu = \mu_2$.

On a $\overline{\prec} = \prec$ (immédiat), donc $Pos(\prec) = Pos_r(\prec)$ et $f = f_\prec = CIRCF(Pos(\prec))$.

L'Example 2.2 (1) de [12] est très semblable. C'est un exemple qui falsifie la *monotonie inversée* (ou *conditionnalisation infinie*): $f(\mathcal{T}) \cup \mathcal{T}'' \models f(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'')$. Apparemment, l'auteur ne savait pas qu'il s'agit d'un exemple de circonscription de formules. C'est même une circonscription de formules "simple", puisque $\prec = \overline{\prec}$, donc on est dans un cas où l'appel à la définition 4.3 est superflu: $Pos_r(\prec) = Pos(\prec) = I_\prec$. □

5 Une description syntaxique

Pour le cas particulier de la circonscription ordinaire $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z})$, nous décrivons de manière syntaxique tous les ensembles de "formules positives".

Notations 5.1 $\mathbf{Y}$ est un ensemble fini consistant de littéraux construits sur les atomes de $\mathbf{Y}' \subseteq V(\mathbf{L})$. On définit les formules $\bigvee(\mathbf{Y}) = \bigvee_{\varphi \in \mathbf{Y}} \varphi$ et $\bigwedge(\mathbf{Y}) = \bigwedge_{\varphi \in \mathbf{Y}} \varphi$.
En particulier $\bigvee(\emptyset) = \bot$ et $\bigwedge(\emptyset) = \top$.

Si de plus, pour tout $Y \in \mathbf{Y}'$, $\mathbf{Y}$ contient Y ou $\neg Y$, l'ensemble de littéraux $\mathbf{Y}$ est *complet* en $\mathbf{Y}'$. □

Théorème 5.1 Le cas de $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z})$:

L'ensemble $\Phi = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q}$ et les relations $\prec = \prec_{(\mathbf{P},\,\mathbf{Q},\,\mathbf{Z})} = \prec_\Phi$ et $\preceq = \preceq_{(\mathbf{P},\,\mathbf{Q},\,\mathbf{Z})} = \preceq_\Phi$ sont comme dans l'exemple 3.1.

On a $Pos(\preceq) \subseteq Pos(\prec) = I_\prec$ (propriété 3.1).
Comme $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\Phi)$, on a aussi $Pos(\prec) = Pos(\prec_\Phi)$ et $Pos(\preceq) = Pos(\preceq_\Phi) = \Phi^{\wedge\vee}$ (voir exemple 3.1 et propriété 3.1-4).

1a. Si $\varphi \in Pos(\prec_\Phi)$, alors φ est positive en $\mathbf{P}$ (sens traditionnel).
1b. $Pos(\preceq_\Phi) = \Phi^{\wedge\vee} \subseteq Pos(\prec_\Phi)$.
1c. Si $\mathbf{P}$ est infini ou $\mathbf{Z} = \emptyset$, alors $Pos(\prec_\Phi) = Pos(\preceq_\Phi) = \Phi^{\wedge\vee}$.

2. Si $\mathbf{P}$ est fini, $Pos(\prec_\Phi)$ est l'ensemble de toutes les formules qui sont des disjonctions de formules du type suivant:

   (a) $\bigwedge(\mathbf{P}_a) \wedge \bigwedge(\mathbf{Q}_l) \wedge (\bigwedge(\mathbf{Z}_l) \vee \bigvee(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a))$, pour $\mathbf{P}_a \subseteq \mathbf{P}$, et pour des ensembles finis $\mathbf{Q}_l$ et $\mathbf{Z}_l$ de littéraux de $\mathbf{Q}$ et de $\mathbf{Z}$ respectivement.

   On peut aussi décrire $Pos(\prec_\Phi)$ comme l'ensemble de toutes les conjonctions de formules du type

   (b) $\bigvee(\mathbf{P}_a) \vee \bigvee(\mathbf{Q}_l) \vee (\bigvee(\mathbf{Z}_l) \wedge \bigwedge(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a))$.

   (a') (b') Si $V(\mathbf{L})$ est fini, on peut ne considérer en (a) et en (b) que les ensembles de littéraux $\mathbf{Q}_l$ complets en $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}_l$ complets en $\mathbf{Z}$.

3a. $Pos_r(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Phi)$. Donc $\prec = \prec_\Phi = \prec_{Pos(\preceq_\Phi)} = \prec_{Pos(\prec_\Phi)}$, c'à-d $CIRCF(\Phi) = CIRCF(Pos(\preceq_\Phi)) = CIRCF(Pos(\prec_\Phi))$.
3b. Si $\mathbf{P}$ est infini ou $\mathbf{Z} = \emptyset$, alors on a $Pos_r(\prec_\Phi) = Pos(\prec_\Phi) = Pos(\preceq_\Phi) = \Phi^{\wedge\vee}$. □

Le point 1a établit que toute formule "positive en Φ" selon nos dénominations, avec $\Phi = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q}$, est positive en $\mathbf{P}$ au sens traditionnel. Cela constitue une partie de la justification de nos dénominations "formules positives en un ensemble de formules Φ".

Le point 1b ré-écrit des résultats déjà donnés, dans le cas de la circonscription ordinaire: l'ensemble des "formules positives en Φ, pour l'acception minimale", est la fermeture pour $\wedge$ et $\vee$ de l'ensemble Φ. Cet ensemble est toujours inclus dans l'ensemble des "formules positives en Φ, pour l'acception étendue". Cette inclusion nous a permis de ne pas préciser l'acception considérée dans notre commentaire sur 1a, ci-dessus.

Le point 1c montre que, sauf en présence de propositions variables et d'un nombre fini de propositions circonscrites, on a égalité entre les acceptions minimales et étendues de "l'ensemble des formules positives en Φ". Ce résultat est particulièrement intéressant. D'une part, il fournit une propriété importante (identité entre c-équivalence et équivalence forte) qui est toujours vraie pour les circonscriptions sans variable, et pas pour les circonscriptions avec variables. D'autre part, il fournit sous conditions une description syntaxique simple de l'ensemble des formules positives en Φ, même pour l'acception étendue. Dans ses conditions d'application ($\mathbf{Z} = \emptyset$ ou $\mathbf{P}$ infini), on a, pour tout $\Psi \subseteq \mathbf{L}$:

$$CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\Psi) \text{ ssi } \Psi^{\wedge\vee} = \Phi^{\wedge\vee}.$$

Le point 2 complète le point 1c, puisqu'il fournit une (deux en fait) description syntaxique de l'ensemble des "formules positives en Φ, pour l'acception étendue", dans le cas qui échappe au résultat du 1c. Notons d'ailleurs que le cas $\mathbf{Z} = \emptyset$ du point 2 est assez immédiat: la difficulté de la description est due à la présence éventuelle d'éléments de $\mathbf{Z}$, lesquels ne peuvent apparaître que dans des positions bien précises.

Le point 3a montre que la complication de "l'acception restreinte" pour les ensembles de formules positives, dans le cas où $V(\mathbf{L})$ est infini, est inutile dans le cas de la circonscription ordinaire. En effet, les "acceptions restreintes" et "étendues" sont toujours identiques dans ce cas. Toutes les complications vues en partie 4 sont donc inutiles dans le cas de la circonscription ordinaire.

Le point 3b réunit les points 1c et 3a.

Démonstration: 1a. Soit $\varphi \in Pos(\prec) = I_\prec$ et soit $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$ une *forme normale disjonctive réduite* de φ: chaque φ_i est une conjonction distincte de littéraux et, si φ' est une conjonction de littéraux telle que $\varphi_i \models \varphi', \varphi_i \neq \varphi'$, alors $\varphi' \not\models \varphi$.
On suppose que $\neg P$ figure dans φ_i, pour $P \in \mathbf{P}$. On appelle φ'_i la conjonction (éventuellement $\top$) des autres littéraux de φ_i. Soit μ un modèle de φ'_i. Si $\mu \not\models P$, alors $\mu \models \varphi_i$ donc $\mu \models \varphi$. Sinon, avec $\nu = \mu - \{P\}$, on a $\nu \prec \mu$ et $\nu \models \varphi_i$ donc $\nu \models \varphi$ et, comme $\varphi \in Pos(\prec)$, là encore $\mu \models \varphi$. Donc $\mathbf{M}(\varphi'_i) \subseteq \mathbf{M}(\varphi)$, ce qui contredit le fait que nous sommes partis d'une forme réduite de φ.

1b. Propriété 3.1-3 et-4.

1c. Si $\mathbf{Z} = \emptyset$, alors $V(\varphi) \subseteq \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$: cf 1a et 1b.
Soit $\mathbf{P}$ infini et $\mathbf{Z} \neq \emptyset$. D'après 1a et 1b on sait que si $V(\varphi) \subseteq \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$, alors $\varphi \in Pos(\prec)$ ssi φ est positive en $\mathbf{P}$. On suppose qu'on a $V(\varphi) \not\subseteq \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$, et que $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$ est une forme normale disjonctive réduite de $\varphi \in Pos(\prec)$. Soit Z un élément de $\mathbf{Z} \cap V(\varphi_i)$. φ'_i est la conjonction (éventuellement $\top$) des littéraux de φ_i sans élément de $\mathbf{Z}$. Soit P un élément de $\mathbf{P} - V(\varphi)$. Soit μ un modèle de φ'_i, alors il existe un modèle μ' of φ_i tel que $\mu' \cap (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) = \mu \cap (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q})$. On définit $\nu = \mu \cup \{P\}$. Alors, $\mu' \prec \nu$ donc $\nu \models \varphi$. $P \notin V(\varphi)$ et $(\mu \cup \nu) - (\mu \cap \nu) = \{P\}$, donc $\mu \models \varphi$. Donc, $\mathbf{M}(\varphi'_i) \subseteq \mathbf{M}(\varphi)$, ce qui contredit le fait que nous sommes partis d'une forme réduite de φ.

2. $\mathbf{P}$ étant fini, si $\mathbf{P}_a \subseteq \mathbf{P}$, $\mathbf{P}_a$ et $\mathbf{P} - \mathbf{P}_a$ sont finis.

(a)
• Si $\varphi = \bigwedge(\mathbf{P}_a) \wedge \bigwedge(\mathbf{Q}_l) \wedge (\bigwedge(\mathbf{Z}_l) \vee \bigvee(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a))$, pour un sous-ensemble $\mathbf{P}_a$ de $\mathbf{P}$ et des ensembles consistants $\mathbf{Q}_l$ et $\mathbf{Z}_l$ de littéraux de $\mathbf{Q}$ et de $\mathbf{Z}$ respectivement, alors $\varphi \in Pos(\prec)$:
Supposons en effet $\mu \models \varphi$ et $\mu \prec \nu$. Comme $\mu \cap \mathbf{P} \subseteq \nu \cap \mathbf{P}$, on a $\nu \models \bigwedge(\mathbf{P}_a)$. Comme $\mu \cap \mathbf{Q} = \nu \cap \mathbf{Q}$, on a également $\nu \models \bigwedge(\mathbf{Q}_l)$. Enfin, comme $\mu \cap \mathbf{P} \subset \nu \cap \mathbf{P}$, on a $\nu \models \bigvee(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a)$ et donc $\nu \models \varphi$. Ceci démontre $\varphi \in Pos(\prec)$.
$Pos(\prec)$ étant fermé pour $\vee$, toute disjonction de formules de ce type est donc également dans $Pos(\prec)$.

• Soit $\varphi \in Pos(\prec)$ et $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$ une forme normale disjonctive réduite de φ.
D'après le point 1a, on peut écrire φ_i sous la forme $\bigwedge(\mathbf{P}_a) \wedge \bigwedge(\mathbf{Q}_l) \wedge \bigwedge(\mathbf{Z}_l)$ pour un sous-ensemble $\mathbf{P}_a$ de $\mathbf{P}$ et des ensembles consistants $\mathbf{Q}_l$ et $\mathbf{Z}_l$ de littéraux de $\mathbf{Q}$ et de $\mathbf{Z}$ respectivement. Si $\mathbf{P}_a \neq \mathbf{P}$, on définit la formule $\varphi'_i = \bigwedge(\mathbf{P}_a) \wedge \bigwedge(\mathbf{Q}_l) \wedge \bigvee(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a)$ (si $\mathbf{P}_a = \mathbf{P}$, φ_i est déjà sous la forme souhaitée). Supposons aussi $\varphi_i \neq \top$ (sinon φ est déjà sous la forme voulue, étant la "disjonction" d'un seul terme, ce terme étant la conjonction vide). Soit $\nu \in \mathbf{M}(\varphi'_i)$. Pour tout $\mu \in \mathbf{M}(\varphi_i)$, on définit $\mu' = \mathbf{P}_a \cup (\nu \cap \mathbf{Q}) \cup (\mu \cap \mathbf{Z})$. Alors $\mu' \cap \mathbf{P} = \mathbf{P}_a \subset \nu \cap \mathbf{P}$ et $\mu' \cap \mathbf{Q} = \nu \cap \mathbf{Q}$, donc $\mu' \prec \nu$. On a $\mu' \models \varphi_i$ d'après la définition de μ', donc $\mu' \models \varphi$ et, comme $\varphi \in Pos(\prec)$, on obtient $\nu \models \varphi$. Cela démontre $\mathbf{M}(\varphi_i) \subseteq \mathbf{M}(\varphi)$. On définit $\varphi' = \varphi \vee (\bigvee_{i=1}^n \varphi'_i)$. On a alors $\mathbf{M}(\varphi) = \mathbf{M}(\varphi')$, c'à-d $\varphi = \varphi'$, et donc $\varphi = \bigvee_{i=1}^n (\varphi_i \vee \varphi'_i)$. On obtient

$\varphi_i \vee \varphi'_i = \bigwedge(\mathbf{P}_a) \wedge \bigwedge(\mathbf{Q}_l) \wedge (\bigwedge(\mathbf{Z}_l) \vee \bigvee(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a))$: φ peut s'écrire sous la forme d'une disjonction de formules du type indiqué en point 2 (a) de l'énoncé de la proposition.

(a') Si $V(\mathbf{L}) = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \mathbf{Z}$ est fini, on peut ne considérer que les formules $\bigwedge(\mathbf{Q}_l)$ et $\bigwedge(\mathbf{Z}_l)$ correspondant à des ensembles de littéraux $\mathbf{Q}_l$ et $\mathbf{Z}_l$ qui sont complets respectivement en $\mathbf{Q}$ et en $\mathbf{Z}$. En effet, dans le cas fini, toute formule $\bigwedge(\mathbf{Q}'_l)$, pour tout ensemble de littéraux $\mathbf{Q}'_l$ de $\mathbf{Q}$, est la disjonction de formules du type $\bigwedge(\mathbf{Q}_l)$, chaque $\mathbf{Q}_l$ étant un ensemble de littéraux complets en $\mathbf{Q}$. On a la même chose pour $\mathbf{Z}$.

Remarquons que l'on peut être plus précis dans ce cas ($V(\mathbf{L})$ fini):
Soit l'ensemble des formules $\bigwedge(\mathbf{P}_a) \wedge \bigwedge(\mathbf{Q}_l) \wedge (\bigwedge(\mathbf{Z}_l) \vee \bigvee(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a))$, pour tous les sous-ensembles $\mathbf{P}_a$ de $\mathbf{P}$ et tous les ensembles de littéraux $\mathbf{Q}_l$ complets en $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}_l$ complets en $\mathbf{Z}$. Cet ensemble est une *base pour* $\vee$ de l'ensemble $Pos(\prec)$. Cela signifie que cet ensemble est le plus petit (pour $\subseteq$) ensemble X possible tel que $Pos(\prec) = X^{\vee}$. Ceci est un résultat de [8]. Le lecteur intéressé trouvera la démonstration complète, dont les détails sont trop longs pour figurer ici, dans la démonstration du point 2 de la Proposition 6.32 de [9].

(b) (b') Les résultats pour la conjonction, à la place de la disjonction, se démontrent de la même façon, en échangeant les rôles de $\wedge$ et de $\vee$. On peut en particulier démontrer aussi, pour le point (b'), l'analogue de la remarque qui suit la démonstration du point (a'): Si $V(\mathbf{L})$ est fini, l'ensemble Y de toutes les formules $\bigvee(\mathbf{P}_a) \vee \bigvee(\mathbf{Q}_l) \vee (\bigvee(\mathbf{Z}_l) \wedge \bigwedge(\mathbf{P} - \mathbf{P}_a))$, pour tous les sous-ensembles $\mathbf{P}_a$ de $\mathbf{P}$ et tous les ensembles de littéraux $\mathbf{Q}_l$ complets en $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Z}_l$ complets en $\mathbf{Z}$, est la *base pour* $\wedge$ de $Pos(\prec)$: $(Pos(\prec))_{\wedge} = Y$ (remplacer $\vee$ par $\wedge$ dans la définition de la base pour $\vee$ donnée ci-dessus). Cela signifie que $Y^{\wedge} = Pos(\prec)$ et qu'un ensemble X est tel que $X^{\wedge} = Pos(\prec)$ ssi $Y \subseteq X \subseteq Pos(\prec)$.

3a. On sait, d'après la propriété 4.2, qu'il suffit d'établir $Pos(\prec) \subseteq Pos_r(\prec)$.
Soit $\varphi \in Pos(\prec)$, et soient deux interprétations telles que $\mu \,\overline{\prec}\, \nu$, $\mu \not\prec \nu$, et $\nu \models \varphi$. Comme $\Phi \subseteq Pos(\prec)$, d'après la propriété 4.1-1, on obtient $(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q})_{\mu} \subseteq (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q})_{\nu}$: $\mu \cap \mathbf{P} \subseteq \nu \cap \mathbf{P}$ et $\mu \cap \mathbf{Q} = \nu \cap \mathbf{Q}$. Comme $\mu \not\prec \nu$, on obtient $\mu \cap \mathbf{P} = \nu \cap \mathbf{P}$. Nous séparons maintenant la démonstration en deux cas.

Cas 1: $\mathbf{P}$ fini. Pour $\psi = \bigwedge(\mu \cap \mathbf{P}) \wedge \bigwedge(\neg(\mathbf{P} - \mu))$, $\mu \in \mathbf{M}(\psi)$,$\nu \in \mathbf{M}(\psi)$ et, comme $\mu \,\overline{\prec}\, \nu$, il existe μ',ν' dans $\mathbf{M}(\psi)$ avec $\mu' \prec \nu'$. Donc, $\mu' \cap \mathbf{P} \subset \nu' \cap \mathbf{P}$, une contradiction avec $\mu' \models \psi$ et $\nu' \models \psi$. on a donc $\mu' \cap \mathbf{P} = \nu' \cap \mathbf{P}$. On ne peut donc pas avoir notre hypothèse si $\mathbf{P}$ est fini.

Cas 2: $\mathbf{P}$ est infini. D'après 1c on obtient $Pos(\prec) = Pos(\preceq) = (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q})^{\wedge\vee}$, donc $\mu \models \varphi$.

Cas 1 et 2: Ainsi, dans les deux cas, d'après la définition 4.3, on a $\varphi \in Pos_r(\prec)$. Ceci démontre qu'on a $Pos(\prec) \subseteq Pos_r(\prec)$, donc $Pos(\prec) = Pos_r(\prec)$.
On a donc $\prec = \prec_{\Phi} = \prec_{Pos(\preceq_{\Phi})} = \prec_{Pos(\prec_{\Phi})}$. En effet, on sait qu'on a $\prec = \prec_{\Phi} = \prec_{Pos(\preceq_{\Phi})}$ d'après la propriété 3.1-4 et le théorème 3.4-2a, et on a $\prec = \prec_{Pos_r(\prec)}$ d'après le théorème 4.4, tandis que l'on vient d'établir $Pos(\prec_{\Phi}) = Pos(\prec) = Pos_r(\prec)$.

3b. Si P est infini ou $\mathbf{Z} = \emptyset$, on sait d'après 1c qu'on a $Pos(\prec) = Pos(\preceq) = (\mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \cup \neg\mathbf{Q})^{\wedge\vee}$. D'après 3a on obtient $Pos_r(\prec) = Pos(\prec)$. □

Exemple 5.1 $\Phi_1 = \mathbf{P} = \{P_1,P_2\}$,
$\Phi_2 = \{P_1 \wedge P_2, P_1 \vee P_2\}$,
$(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z})$ est une partition de $V(\mathbf{L})$ et
$\prec = \prec_{(\mathbf{P},\ \mathbf{Q},\ \mathbf{Z})}$.

Si $\mathbf{Q} = \emptyset$, on a $f_{\prec} = CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\Phi_1)$ d'après la propriété 2.2.

Dans tous les cas on a $\prec_{\Phi_1} = \prec_{\Phi_2}$, c'à-d
$CIRCF(\Phi_1) = CIRCF(\Phi_2)$ (lemme 2.3-3b), c'à-d
$\Phi_1 \equiv_c \Phi_2$.
Noter cependant qu'on a $\Phi_1 \not\equiv_{fc} \Phi_2$:
Démonstration directe: $\Phi_1 \cup \{P_1\} = \Phi_1$, $\Phi_2 \cup \{P_1\} = \Phi'_2$.
$CIRCF(\Phi_1)(P_1 \vee P_2) = Th(P_1 \Leftrightarrow \neg P_2)$, tandis que $CIRCF(\Phi'_2)(P_1 \vee P_2) = Th(\neg P_1 \wedge P_2)$ car d'après le lemme 2.3-3b on a $\{P_2\} \not\prec_{\Phi_1} \{P_1\}$ et $\{P_2\} \prec_{\Phi'_2} \{P_1\}$.
Démonstration en utilisant le théorème 3.4-2a:
$Pos(\preceq_{\Phi_1}) = {\Phi_1}^{\wedge\vee} = \{\bot, P_1 \wedge P_2, P_1, P_2, P_1 \vee P_2, \top\}$, et
$Pos(\preceq_{\Phi_2}) = {\Phi_2}^{\wedge\vee} = \{\bot, P_1 \wedge P_2, P_1 \vee P_2, \top\}$.
Les deux ensembles sont différents, donc $\Phi_1 \not\equiv_{fc} \Phi_2$.

Séparons maintenant l'exemple en deux, en prenant pour simplifier un singleton pour $\mathbf{Z}$.

a) $\mathbf{Q} = \emptyset$, $\mathbf{Z} = \{Z\}$ (cas sans proposition fixe).

$f_{\prec} = CIRC(\mathbf{P},\emptyset,Z))$, $\prec = \prec_{(\{P_1,P_2\},\emptyset,Z)}$.
$\Phi_3 = \{P_1 \wedge P_2 \wedge Z, P_1 \wedge P_2 \wedge \neg Z, P_1 \vee (P_2 \wedge Z), P_1 \vee (P_2 \wedge \neg Z), P_2 \vee (P_1 \wedge Z), P_2 \vee (P_1 \wedge \neg Z), P_1 \vee P_2 \vee Z, P_1 \vee P_2 \vee \neg Z\}$.
On a donc $f_{\prec} = CIRC(\{P_1,P_2\},\emptyset,Z) = CIRCF(\Phi_3) = CIRCF(\Phi_1) = CIRCF(\Phi_2)$. Cela peut se vérifier directement (d'après le lemme 2.3-3b) ou en utilisant le théorème 5.1-2 qui donne $Pos(\prec) = {\Phi_3}^{\wedge} = {\Phi_3}^{\wedge\vee}$, donc, comme $Pos(\prec)$ est fermé pour $\vee$, $Pos(\prec) = {\Phi_3}^{\wedge\vee}$. Donc $f_{\prec} = CIRC(\{P_1,P_2\},\emptyset,Z) = CIRCF(Pos(\prec)) = CIRCF(\Phi_3)$ d'après le théorème 5.1-3. D'après le théorème 3.4-1b (un cas particulier

du théorème 4.4), l'ensemble $\Psi = I_{\prec} = Pos(\prec) = Pos_r(\prec) = {\Phi_3}^{\wedge}$ est le plus grand ensemble (pour $\subseteq$) tel que $f_{\prec} = CIRF(\Psi)$.
En particulier, en utilisant le théorème 3.4-2 qui donne $CIRCF(\Phi_1) = CIRCF({\Phi_1}^{\wedge\vee})$, on trouve ${\Phi_1}^{\wedge\vee} \subseteq {\Phi_3}^{\wedge}$ (ce qu'il est facile de vérifier directement).

On a donc $Pos(\prec_{\Phi_1}) = Pos(\prec_{\Phi_2}) = Pos(\prec_{\Phi_3}) = {\Phi_3}^{\wedge}$.

b) $\mathbf{Q} = \{Q\}, \mathbf{Z} = \{Z\}$ (cas avec proposition fixe, une seule pour simplifier):

$f_{\prec} = CIRC(\mathbf{P}, Q, Z)$, $\prec = \prec_{(\{P_1,P_2\},Q,Z)}$.
Avec $\Psi_i = \Phi_i \cup \{Q, \neg Q\}$ ($i \in \{1,2\}$), on obtient $f_{\prec} = CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\Psi_1) = CIRCF(\Psi_2)$. L'ensemble Ψ_3, qui joue le rôle de Φ_3 ci-dessus, est constitué de tous les φ de Φ_3, dupliqués en deux formules $\varphi \vee Q$ et $\varphi \vee \neg Q$.

On a ici $I_{\prec} = Pos(\prec) = Pos(\prec_{\Psi_1}) = Pos(\prec_{\Psi_2}) = Pos(\prec_{\Psi_3}) = {\Psi_3}^{\wedge} = {\Psi_3}^{\wedge\vee}$.

Il existe toujours un plus grand ensemble $\Psi = Pos(\prec)$ tel que $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\Psi)$. Cependant, cet exemple montre qu'il n'existe pas en général de plus petit ensemble Ψ' tel que $CIRC(\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{Z}) = CIRCF(\Psi')$. On a en effet deux ensembles minimaux pour $\subseteq$: Φ_1 et Φ_2 (cas a) ou Ψ_1 et Ψ_2 (cas b). □

6 Conclusion et travail futur

6.1 Les résultats fournis

Nous avons décrit tous les ensembles de formules Φ qui fournissent la même circonscription de formules qu'un ensemble Ψ donné. Nous avons également décrit tous les ensembles Φ qui, une fois complétés par un ensemble quelconque Φ', fournissent la même circonscription de formules que l'ensemble Ψ complété par Φ'. La description fournie est entièrement syntaxique dans le second cas ("équivalence forte"). Dans le premier cas ("c-équivalence"), nous avons fourni une description purement syntaxique dans le cas où on part d'une circonscription ordinaire (c'à-d d'un ensemble Ψ composé uniquement d'atomes et de paires de littéraux opposés). Nous avons également traité le cas le plus général (ensemble infini Φ de formules quelconques), mais il ne semble pas exister de description syntaxique aussi simple dans ce cas.
Ces résultats sont importants pour au moins deux raisons. Ils devraient faciliter l'automatisation du calcul de la circonscription, car une fois que l'on connaît tous les ensembles équivalents, on peut partir de l'ensemble qui est le meilleur du point de vue du calcul. Il reste à déterminer lequel est "le meilleur", mais nos résultats constituent déjà le premier pas indispensable vers cet objectif.
Ces résultats devraient également faciliter l'utilisation effective de la circonscription. C'est évidemment une bonne chose de savoir quand deux ensembles de formules donnent la même circonscription. Il est aussi utile de savoir quand cette équivalence est préservée par tout ajout de nouvelles formules. Mais nous aimerions ébaucher ici ce qui nous semble constituer une application prometteuse de ces résultats, en ce qui concerne la traduction de situations complexes, impliquant plusieurs ensembles de règles.

6.2 Un développement possible: combiner des ensembles de formules

Nous pensons, contrairement à la tradition (circonscriptions avec priorités) qu'il est souvent possible d'utiliser une seule circonscription d'un ensemble de formules judicieusement choisi. L'idée, afin de traduire une situation combinant deux ensembles de règles, est de décrire une combinaison pertinente des deux ensembles de formules associés à chacun de ces ensembles de règles, afin de trouver l'ensemble de formules associé à la combinaison de ces deux ensembles de règles. Différents types de combinaisons doivent être envisagés. Par exemple, on peut donner la priorité à un des deux ensembles de règles sur l'autre. Pour définir précisément de telles combinaisons d'"ensembles de formules", il faut d'abord connaître la nature exacte de ces "ensembles". Ces ensembles étant considérés ici du point de vue de la circonscription de formules qu'ils définissent, les résultats sur les ensembles de formules équivalents pour la circonscription donnés dans ce texte apportent la réponse à cette question. Il reste à définir les combinaisons de ces ensembles de formules à effectuer, selon le cas. Là encore, les résultats présentés ici sont utiles. Une ébauche de méthode est présentée en [9, partie 7], et nous donnons ici un seul exemple afin de permettre au lecteur de comprendre l'affirmation précédente. Supposons que l'on ait un premier ensemble de règles, dont on sait qu'il correspond à la circonscription d'un ensemble $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ de formules, et un second ensemble de règles correspondant à un second ensemble de formules $\Psi = \{\psi_i\}_{i \in I}$. Les indices sont un moyen ici de considérer différents "individus" tout en restant dans un cadre propositionnel.
On veut traduire la situation correspondant aux deux ensembles de règles, avec priorité, "individu par individu", aux règles du premier ensemble sur le second. Nous proposons la combinaison suivante d'ensembles de formules: $\Phi > \Psi = \{\varphi_i \wedge \psi_i, \varphi_i, \varphi_i \vee \psi_i\}_{i \in I}$. Afin de justifier intuitivement cette proposition, plaçons-nous dans le cas où les deux ensembles de formules $\{\varphi_i \wedge$

$\psi_i, \varphi_i \vee \psi_i\}_{i\in I}$ et $\{\varphi_i, \psi_i\}_{i\in I}$ sont c-équivalents (fournissent la même circonscription). L'ensemble $\Phi\|\Psi = \{\varphi_i,\ \psi_i\}_{i\in I}$ correspond naturellement à la combinaison des deux ensembles de règles, sans priorité particulière (c'est la *circonscription parallèle* des textes “historiques” sur la circonscription). Ce que l'on a fait ici est de donner une plus grande force aux règles associées aux φ_i en cassant la symétrie entre φ_i et ψ_i présente dans $\Phi\|\Psi$, au profit de φ_i. Nous considérons que cette méthode est préférable à la circonscription avec priorités classiquement proposée dans ce cas [7]. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [9, partie 7] pour plus de détails. Cette courte ébauche n'a pas ici d'autre but que de montrer pourquoi il est indispensable de connaître les cas d'équivalences d'ensembles afin de mettre au point de telles combinaisons d'ensembles de formules.

6.3 Perspectives

1) Nous avons déjà signalé qu'il est paradoxal qu'une étude si naturelle et si fondamentale n'ait pas été entreprise plus tôt. Il semble qu'une raison en soit la technicité de la circonscription de prédicats. Notre travail se limite ici au cas du calcul propositionnel, et c'est cette restriction qui nous a permis d'avancer de façon significative. Mais il faudra bien aussi aborder le cas du calcul des prédicats. Nous avons étudié le cas d'un langage propositionnel infini, qui nous semble important, d'autant plus qu'en propositionnel on est beaucoup plus vite amené à considérer un langage infini que dans le cas du calcul des prédicats (par exemple si on veut simuler une fonction, on obtient en général un langage infini). Mais l'étude du cas infini a aussi un autre objectif, qui est l'examen du cas du calcul des prédicats. Le cas propositionnel infini fournit un premier pas vers cet objectif, même si ce pas est bien sûr loin d'être suffisant pour décrire les cas d'équivalences de formules avec la circonscription de prédicats (version de formules).

2) Il reste à élaborer des méthodes de calcul des ensembles minimaux équivalents (dans les divers sens étudiés ici) à un ensemble donné. Les résultats présentés ici ne fournissent que la base d'un tel travail, qui devrait être utile pour le calcul automatique.

3) En ce qui concerne la méthode de combinaisons évoquée en sous-partie 6.2, là encore l'essentiel reste à faire: Il s'agit de décrire précisément une méthode de combinaison d'ensembles de formules associée à une combinaison donnée d'ensembles de règles, et cela dans tous les cas de priorités respectives possibles, et avec autant d'ensembles de règles que l'on veut.

Références

[1] G. Bossu and P. Siegel. Saturation, nonmonotonic reasoning and the closed-world assumption. *Artificial Intelligence*, 25:13–63, 1985.

[2] T. Costello. The expressive power of circumscription. *Artificial Intelligence*, 104(1–2):313–329, Sept. 1998.

[3] J. de Kleer and K. Konolige. Eliminating the Fixed Predicates from a Circumscription. *Artificial Intelligence*, 39:391–398, 1989.

[4] M. Freund. Preferential reasoning in the perspective of Poole default logic. *Artificial Intelligence*, 98(1, 2):209–235, Jan. 1998.

[5] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics. *Artificial Intelligence*, 44:167–207, 1990.

[6] D. Makinson. General patterns in nonmonotonic reasoning. In D. M. Gabbay, C. Hogger, and J. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 3: Non-Monotonic and Uncertainty Reasoning*, pages 35–110. Oxford University Press, 1994.

[7] J. McCarthy. Application of circumscription to formalizing common sense knowledge. *Artificial Intelligence*, 28:89–116, 1986.

[8] Y. Moinard and R. Rolland. Circumscriptions from what they cannot do (Preliminary report). In *Common Sense'98*, pages 20–41, London, 7^{th} to 9^{th} January 1998. `http://www.ida.liu.se/ext/etai/nj/fcs-98/listing.html`.

[9] Y. Moinard et R. Rolland. Propositional circumscriptions. Research Report RR-3538 INRIA, ou PI 1211 IRISA, Rennes, France, octobre 1998. `http://www.irisa.fr/EXTERNE/bibli/pi/1211`

[10] D. Perlis and J. Minker. Completeness results for circumscription. *Artificial Intelligence*, 28:29–42, 1986.

[11] K. Satoh. A Probabilistic Interpretation for Lazy Nonmonotonic Reasoning. In *AAAI-90*, pages 659–664. MIT Press, 1990.

[12] K. Schlechta. *Nonmonotonic Logics: Basic Concepts, Results and Techniques, LNAI 1187.* Springer-Verlag, Bonn, 1997.