Thèse

Problèmes de satisfaction de contraintes spatiales : algorithmes et complexité

Version rapporteurs

Jean-François Condotta

11 octobre 1999

Table des matières

Chapitre 1

L'algèbre des intervalles et l'algèbre des points

1.1 Introduction

Le problème de la représentation des connaissances temporelles et du raisonnement temporel est un problème central en intelligence artificielle, notamment dans des domaines tels que la compréhension du langage naturel, la spécification et la vérification des programmes et des systèmes, la planification temporelle, *etc* . Au début des années 80, Allen [All81, All83] propose un formalisme de représentation du temps et un mécanisme de raisonnement sur les éléments de cette représentation. Par la simplicité de ce formalisme et de ce mécanisme de raisonnement, le modèle des intervalles est vite devenu populaire et est très utilisé de nos jours encore dans des domaines comme la planification. Les objets temporels considérés par Allen sont les intervalles de la droite. Un intervalle peut représenter un événement ou bien une action par exemple. Les relations temporelles prises en compte sont des relations de type qualitatif, elles ne font intervenir aucune métrique. Elles sont basées sur 13 relations basiques qui correspondent aux 13 configurations pouvant se présenter entre deux intervalles : le premier intervalle précède, est précédé par, rencontre, est rencontré par, chevauche, est chevauché par, débute, est débuté par, est inclus dans, contient, égale, termine, ou est terminé par le second intervalle. Ces relations permettent d'exprimer des situations telles que : «une action se déroule pendant une autre», aussi bien que des situations faisant intervenir des informations incomplètes ou incertaines comme : «une action se déroule avant, pendant ou après une autre». Allen représente les ensembles d'informations temporelles par des réseaux temporels qui sont des CSP particuliers. Étant donné un réseau temporel, le problème principal qui se pose est de savoir si ce réseau représente des informations temporelles cohérentes (le problème de la consistance). Pour le résoudre, Allen propose un algorithme en temps polynomial accomplissant ce que l'on appelle la consistance de chemin. Comme nous allons le voir, dans le cas général cet algorithme n'est pas complet pour le problème qu'il tente de résoudre. En fait, ce dernier est un problème NP-complet. Ainsi, de nombreux travaux ont eu pour but de trouver des cas particuliers pour lesquels la méthode de la chemin-consistance (ou bien toute autre méthode polynomiale) est complète.
Un autre formalisme temporel est celui proposé par Vilain et Kautz : l'algèbre des points [VK86]. Les entités temporelles considérées par ces derniers sont les points de la droite. Un point représente un instant. Comme pour le modèle d'Allen les relations de l'algèbre des

points sont d'ordre qualitatif. Elles sont basées sur trois relations basiques correspondant aux situations suivantes : un instant précède, suit, égale un autre instant. En suivant la démarche employée par Allen, Vilain et Kautz représentent les informations temporelles entre un ensemble de points par des réseaux de contraintes et utilisent la méthode de la consistance de chemin comme mécanisme de raisonnement. Dans le cadre de l'algèbre des points cette méthode est complète et permet de résoudre le problème de la consistance des réseaux de points en temps polynomial.
Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier en détail la représentation d'Allen et celle de Vilain et Kautz. Dans un premier temps nous donnerons formellement la définition de ces deux structures. Puis nous introduirons la méthode de la consistance de chemin. Ensuite, nous discuterons de la traitabilité de l'algèbre des points et nous rappellerons les cas particuliers pour lesquels cette méthode est complète dans l'algèbre des intervalles. Enfin nous conclurons.

1.2 L'algèbre des intervalles (AI)

La structure temporelle d'Allen peut être présentée de deux façons : soit d'une manière relationnelle [All81, All83] , soit d'une manière plutôt axiomatique en présentant l'axiomatisation en logique du premier ordre donnée dans [AH85]. Nous avons opté pour la première de ces présentations.
Les objets temporels considérés par Allen sont les intervalles temporels. Un intervalle temporel X est caractérisé par sa borne inférieure et sa borne supérieure, notées respectivement X^- et X^+. Ces intervalles sont interprétés par les intervalles d'un ensemble T muni d'une relation d'ordre $>$. Les ensembles les plus utilisés pour T sont l'ensemble des nombres réels et celui des nombres rationnels munis de la relation d'ordre habituelle, mais il est tout a fait possible de prendre l'ensemble des entiers par exemple. Nous constatons tout de même que des ensembles tels que l'ensemble des entiers ne sont jamais sélectionnés du fait qu'ils ne sont pas denses. Dans la suite, nous utiliserons l'ensemble des réels.

1.2.1 Les relations de l'algèbre des intervalles

Un intervalle peut précéder, succéder, chevaucher, être chevauché par, rencontrer, être rencontré par, contenir, être contenu par, débuter, être débuté par, finir, être fini par ou bien être égal à un autre intervalle. À chacun de ces cas de figure correspond une relation binaire sur l'ensemble des intervalles composée de l'ensemble des couples réels satisfaisant le cas de figure en question, voir la figure 1.1 et le tableau 1.1. Nous obtenons ainsi un ensemble de 13 relations atomiques :

$$\mathcal{B}_{int} = \{b, a, o, oi, m, mi, d, di, s, si, f, fi, eq\}.$$

Quand une paire de deux intervalles (X, Y) se trouve dans une des relations atomiques A, nous dirons que ces deux intervalles satisfont la relation atomique A et nous le noterons $X\ A\ Y$.
Tout couple d'intervalles satisfait au moins une relation atomique, les 13 relations atomiques de AI sont donc complètes. De plus, deux intervalles satisfaisant une relation de $\mathcal{B}_{int}$ ne peuvent pas satisfaire une autre des relations atomiques. Les 13 relations atomiques sont donc aussi mutuellement exclusives et forment donc une partition de l'ensemble des couples des intervalles réels.
Chaque sous-ensemble de relations atomiques appartenant à $\mathcal{B}_{int}$ désigne une relation de

Relation	Symbole	Inverse	Symbole	Signification
X before Y	b (ou <)	Y after X	a (ou >)	
X meets Y	m	Y met-by X	mi	
X overlaps Y	o	Y overlapped-by X	oi	
X starts Y	s	Y started-by X	si	
X during Y	d	Y contains X	di	
X finishes Y	f	Y finished-by X	fi	
X equal Y	eq (ou =)	Y equal X	eq (ou =)	

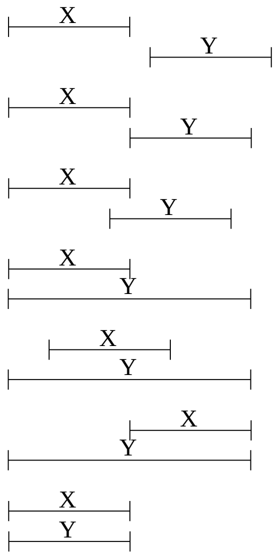


FIG. 1.1: *Les* 13 *relations atomiques de AI.*

l'algèbre des intervalles, celle-ci est définie par l'union des relations atomiques composant le sous-ensemble. Dans la suite, nous noterons l'ensemble de ces relations par $2^{\mathcal{B}_{int}}$, et une relation de cet ensemble sera tout simplement dénotée par l'ensemble des relations atomiques qui la composent. Une relation de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ permet de représenter des informations temporelles entre deux intervalles qui sont incomplètes ou bien incertaines, chacune des relations atomiques de la relation correspond à un cas possible. Ainsi, nous pouvons voir une relation de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ comme la disjonction des relations atomiques qui la composent.

Exemple Soit l'information temporelle : «je lis le journal avant ou pendant mon petit déjeuner». En représentant par l'intervalle X l'intervalle de temps pendant lequel je lis le journal et par Y celui durant lequel je prends mon petit déjeuner, la relation temporelle entre ces deux intervalles sera la relation $\{b, d\}$.

L'ensemble $2^{\mathcal{B}_{int}}$ a 2^{13}, soit 8192 éléments. De plus, il contient deux relations particulières : la relation vide (ϕ) qui correspond à l'impossibilité de relier temporellement deux entités temporelles et la relation totale ($\mathcal{B}_{int}$), que nous noterons parfois ψ, et qui correspond au fait que nous n'avons aucune information temporelle entre deux entités et que nous pouvons envisager toutes les relations atomiques.
Dans la suite, pour tous les intervalles X, Y et pour toute relation R de $2^{\mathcal{B}_{int}}$, l'expression $X\ R\ Y$ signifiera que X et Y sont dans la relation R et satisfont une des relations atomiques de R.

relation atomique A	$A = \{((x^-, x^+), (y^-, y^+))\}$ avec x^-, x^+, y^-, y^+ tels que
before	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- < y^-, x^- < y^+, x^+ < y^-, x^+ < y^+$
after	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- < x^-, y^- < x^+, y^+ < x^-, y^+ < x^+$
meets	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- < y^-, x^- < y^+, x^+ = y^-, x^+ < y^+$
met-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- < x^-, y^- < x^+, y^+ = x^-, y^+ < x^+$
overlaps	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- < y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ < y^+$
overlapped-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- < x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ < x^+$
during	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- > y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ < y^+$
contains	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- > x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ < x^+$
starts	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- = y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ < y^+$
started-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- = x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ < x^+$
finishes	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- > y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ = y^+$
finished-by	$x^- < x^+, y^- < y^+, y^- > x^-, y^- < x^+, y^+ > x^-, y^+ = x^+$
equals	$x^- < x^+, y^- < y^+, x^- = y^-, x^- < y^+, x^+ > y^-, x^+ = y^+$

TAB. 1.1: *Interprétation des 13 relations atomiques.*

1.2.2 Les opérations fondamentales

L'ensemble $2^{\mathcal{B}_{int}}$ est muni des trois opérations binaires : union ($\cup$), intersection ($\cap$) et composition ($\circ$) et des opérations unaires : inverse ou converse ($\smile$) et complémentaire ($\sim$).
L'union, l'intersection et le complémentaire sont les opérations ensemblistes usuelles. La relation atomique inverse de chaque relation atomique est donnée dans la figure 1.1. Allen [All83] fournit une table qui décrit les 169 compositions possibles entre les 13 relations atomiques de AI, cette table se trouve en Annexe A, Section B.1.1. L'inverse d'une relation $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$ et la composition de deux relations R et $S \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$ sont données par les formules suivantes :

- $R^{\smile} = \cup\{A^{\smile} : A \in R\}$;
- $R \circ S = \cup\{A \circ B : A \in R, B \in S\}$.

Exemple À des fins d'illustration considérons les relations de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ $R = \{m, s, si\}$ et $S = \{f, o\}$, nous avons : $R^{\smile} = \{mi, si, s\}$, $R^{\sim} = \{a, b, mi, f, fi, o, oi, d, di, eq\}$, $R \cap S = \phi$, $R \cup S = \{m, s, si, f, o\}$ et $R \circ S = (m \circ f) \cup (m \circ o) \cup (s \circ f) \cup (s \circ o) \cup (si \circ f) \cup (si \circ o) = \{d, o, s\} \cup \{b\} \cup \{d\} \cup \{b, o, m\} \cup \{oi\} \cup \{di, o, fi\} = \{d, o, s, b, m, oi, di, fi\}$.

La relation vide ϕ est l'élément absorbant de la composition et de l'intersection et l'élément neutre de l'union, tandis que la relation identité $\{eq\}$ est l'élément neutre de la composition. Ces opérations fondamentales satisfont les propriétés suivantes :

Propriété 1.2.1 *Pour tous les intervalles X, Y et pour toutes les relations R, S de $2^{\mathcal{B}_{int}}$:*

$$X\ (R \cup S)\ Y \text{ ssi } X\ R\ Y \text{ ou } X\ S\ Y,$$

$$X\ (R \cap S)\ Y \text{ ssi } X\ R\ Y \text{ et } X\ S\ Y,$$

$$X\ (R \circ S)\ Y \text{ ssi il existe un intervalle } Z \text{ tel que } X\ R\ Z \text{ et } Z\ S\ Y,$$

$$X\ R^{\smile}\ Y \text{ ssi } Y\ R\ X,$$

$$X\ R^{\sim}\ Y \text{ ssi } \neg\ Y\ R\ X.$$

Grâce au théorème A.1.1 (qui se trouve en Annexe) relatif aux algèbres de relations [Tar41] nous pouvons déduire le résultat suivant :

Théorème 1.2.1 *La structure* $(2^{\mathcal{B}_{int}}, \cap, \cup, \sim, \phi, \psi, \circ, \smile, \{eq\})$ *est une algèbre de relations propre (voir Section A.1) qui a pour atomes l'ensemble* $\mathcal{B}_{int}$.

Ainsi nous avons affaire à une structure très riche possédant des propriétés très intéressantes [Tar41] telles que la distributivité de la composition sur l'union, ou bien encore telles que l'inverse de la composition de deux relations R et S de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ soit égal à la composition de l'inverse de S avec l'inverse de R. Grâce à cette propriété, Bestougeff et Ligozat [BL89] fournissent une table avec seulement 43 compositions de relations atomiques à partir de laquelle nous pouvons déduire la composition de n'importe quelle paire de relations atomiques.
Par abus de langage nous appelons algèbre des intervalles non seulement la structure composée de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ et de ses opérations mais aussi l'ensemble du formalisme d'Allen.

1.3 L'algèbre des points (AP)

1.3.1 Les relations de l'algèbre des points

Vilain et Kautz [VK86] introduisent une structure temporelle qualitative basée comme pour l'algèbre des intervalles sur une algèbre de relations : l'algèbre des points (AP). Les entités temporelles considérées sont les points de la droite des réels (nous parlerons d'instants). Un instant peut se produire avant, après, en même temps qu'un autre instant. Ces trois cas de figure sont respectivement représentés par les trois relations binaires suivantes :

- $precedes = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$,
- $follows = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$,
- $same = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

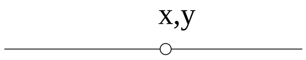
Elles seront respectivement notées en abrégé par les symboles $<$, $>$ et $=$. Elles correspondent à l'ensemble $\mathcal{B}_{pt} = \{<, >, =\}$ (voir le tableau 1.2). Ces trois relations atomiques sont comme celles de AI complètes et mutuellement exclusives. Elles forment ainsi une partition de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. À partir de $\mathcal{B}_{pt}$ sont définies les 8 relations de l'algèbre des points :

$$2^{\mathcal{B}_{pt}} = \{\emptyset, \{<\}, \{>\}, \{=\}, \{<, >\}, \{<, =\}, \{>, =\}, \{<, =, >\}\}.$$

Chaque élément de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$ peut être vu comme la disjonction des relations qui le composent. L'expression $X\ R\ Y$ avec X, Y deux points et R une relation de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$ signifie que X et Y satisfont une relation atomique appartenant à R. Pour tout couple X et Y de points, $X\ \{<, =, >\}$, par contre $X\ \emptyset\ Y$ n'est jamais satisfaite.

1.3.2 Les opérations fondamentales

Comme $2^{\mathcal{B}_{int}}$, $2^{\mathcal{B}_{pt}}$ est muni des opérations fondamentales suivantes : composition ($\circ$), intersection ($\cap$), union ($\cup$), inverse ($\smile$) et complémentaire ($\sim$). Les opérations intersection, union et complémentaire sont les opérations ensemblistes usuelles. Comme Allen, Vilain et Kautz

Relation	Symbole	Inverse	Interprétation
x *precedes* y	$<$	y *follows* x	
x *follows* y	$>$	y *precedes* x	
x *same* y	$=$	y *same* x	

TAB. 1.2: *Les relations atomiques de* $\mathcal{B}_{pt}$.

$\circ$ ↷	$<$	$>$	$=$
$<$	$\{<\}$	$\{<,=,>\}$	$\{<\}$
$>$	$\{<,=,>\}$	$\{>\}$	$\{>\}$
$=$	$\{<\}$	$\{>\}$	$\{=\}$

TAB. 1.3: *L'opération composition sur les relations atomiques de* $\mathcal{B}_{pt}$.

définissent les opérations inverse et composition sur les relations atomiques grâce à des tables (voir les tableaux 1.2 et 1.3), à partir desquelles nous pouvons retrouver l'inverse d'une relation R quelconque de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$ et la composition de deux relations quelconques R et S de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$ en utilisant les formules suivantes :

- $R^{\smile} = \cup\{A^{\smile} : A \in R\}$;
- $R \circ S = \cup\{A \circ B : A \in R, B \in S\}$.

Ces opérations satisfont les propriétés des opérations relationnelles usuelles de même nom (*cf.* la propriété 1.2.1). Ainsi, comme pour AI, l'ensemble des relations de l'algèbre des points $2^{\mathcal{B}_{pt}}$ muni de ces opérations forme une algèbre de relations propre :

Théorème 1.3.1 *La structure* $(2^{\mathcal{B}_{pt}}, \cap, \cup, \sim, , \{<,=,>\}, \circ, ^{\smile}, \{=\})$ *est une algèbre de relations propre (voir Section A.1) qui a pour atomes l'ensemble* $\mathcal{B}_{pt}$.

L'algèbre des points a donc une structure similaire à celle de l'algèbre des intervalles.
Avant de poursuivre notre état de l'art et d'introduire les réseaux d'intervalles et de points, il nous semble indispensable de faire quelques rappels sur les problèmes de satisfaction de contraintes binaires (CSP).

1.4 Rappels sur les CSP

Dans la suite nous serons concernés uniquement par des CSP binaires et pour alléger la notation nous ne préciserons plus le terme : binaire. Toutes les définitions et notions rappelées dans cette section ont été introduites par Mackworth et Montanari. Pour plus de détails le lecteur pourra se reporter à [Mac77, Mon74].

Définition 1.4.1 *Un CSP est une structure* (V, D, C) *où* V *est un ensemble fini de variables* $V_1, \ldots, V_{|V|}$, D *un ensemble de domaines* $D_1, \ldots, D_{|V|}$ *avec* D_i *le domaine des valeurs possibles de la variable* V_i, C *un ensemble de contraintes binaires entre les variables de* V. *Une* *contrainte binaire C_{ij} entre les variables V_i et V_j est un ensemble de valeurs de $D_i \times D_j$ (nous supposons qu'il y a une contrainte binaire par couple de variables et que $(v_i, v_j) \in C_{ij}$ ssi $(v_j, v_i) \in C_{ji}$).*

Un CSP peut être représenté par un graphe $G = (V, E)$ où chaque sommet S_i de V représente une variable V_i de V et est étiqueté par le domaine D_i, chaque arc E_{ij} de G entre les deux sommets S_i et S_j est étiqueté par la contrainte C_{ij} (dans le cas où C_{ij} est égale à $D_i \times D_j$ nous n'étiquetons pas l'arc).
Une instanciation consistante (ou solution) d'un CSP (V, D, C) est une valuation $v_1, \ldots, v_{|V|}$ des variables de $V_1, \ldots, V_{|V|}$ telle que $\forall i, j \in 1, \ldots, |V|$, $v_i \in D_i$ et $(v_i, v_j) \in C_{ij}$. Un CSP est consistant s'il admet au moins une instanciation consistante. Deux CSP sont équivalents s'ils ont le même ensemble de variables et s'ils admettent les mêmes instanciations consistantes. Une instanciation partielle consistante d'un ensemble de k ($k < |V|$) variables $V_1, \ldots, V_k$ de V est une assignation $v_1, \ldots, v_k$ de ces variables telle que $\forall i, j \in 1, \ldots, k$, $v_i \in D_i$ et $(v_i, v_j) \in C_{ij}$.
Plusieurs propriétés «plus faibles» que la consistance ont été définies, on les regroupe sous le terme de consistances locales. L'une d'entre elles est la k-consistance. La k-consistance traduit le fait que toute instanciation partielle consistante de $k-1$ variables peut être étendue à une instanciation partielle consistante de k variables.

Définition 1.4.2 *Un CSP (V, D, C) est k-consistant (avec $1 < k \leq |V|$) ssi pour toute instanciation partielle consistante $v_1, \ldots, v_{k-1}$ de $k-1$ variables $V_1, \ldots, V_{k-1}$ de V et pour toute variable $V_k \in V$ telle que $V_k \notin V_1, \ldots, V_{k-1}$ il existe une instanciation partielle consistante de $V_1, \ldots, V_k$ qui value les variables $V_1, \ldots, V_{k-1}$ par $v_1, \ldots, v_{k-1}$.*

Par extension un CSP est 1-consistant aucun des domaines de ses variables n'est vide. Il existe deux consistances locales moins générales que la k-consistance : l'arc-consistance et la chemin-consistance (ou consistance de chemin). Elles peuvent être définies de la façon suivante :

Définition 1.4.3 *Soit un CSP (V, D, C).*

- *Si pour tous les entiers i, j, k et tout couple $(v_i, v_j) \in C_{ij}$ il existe une valeur $v_k \in D_k$ telle que $(v_j, v_k) \in C_{jk}$ alors (V, D, C) est arc-consistant.*
- *Si pour toute séquence (ou chemin) de valeurs $v_{i=k_0}, v_{k_1}, \ldots, v_{k_{n-1}}, v_{j=k_n}$ telle que $(v_{k_l}, v_{k_{l+1}}) \in C_{k_l k_{l+1}}$, $(v_i, v_j) \in C_{ij}$ alors (V, D, C) est chemin-consistant.*

Un CSP est arc-consistant si, et seulement si, il est 1 et 2-consistant. Un CSP complet est un CSP pour lequel entre chaque couple de variables sont définies des contraintes. Avec notre définition de CSP binaire il est évident que tout CSP est complet. Montanari a démontré que la propriété de chemin-consistance est équivalente à la propriété de 3-consistance pour les CSP complets. C'est la raison pour laquelle souvent dans la littérature la propriété de chemin-consistance est définie par celle de la 3-consistance et aucune distinction n'est faite entre ces deux propriétés. Et ainsi, en définissant la composition de deux contraintes binaires C_{ik} et C_{kj} par $C_{ik} \otimes C_{kj} = \{(v_i, v_j) : \exists v_k, (v_i, v_k) \in C_{ik} \text{ et } (v_k, v_j) \in C_{ij}\}$[1], nous pouvons définir la propriété de chemin-consistance de la façon suivante :

Propriété 1.4.1 *Un CSP (V, D, C) est chemin-consistant si, et seulement si, pour tout $i, j, k \in 1, \ldots, |V|$, $C_{ij} \subseteq C_{ik} \otimes C_{kk} \otimes C_{kj}$.*

1. Signalons que l'opération $\otimes$ est associative. Ainsi, pour toutes les contraintes binaires C, C', C'', nous avons : $(C \otimes C') \otimes C'' = (C \otimes C' \otimes C'')$.

Nous appelons problème d'une instanciation consistante d'un CSP le problème de recherche qui consiste à trouver une instanciation consistante de ce CSP (et le cas échéant de reporter son inexistence). Et nous désignons par problème de la consistance d'un CSP le problème de décision qui est de déterminer la consistance ou non de ce CSP. Ces deux problèmes sont dans le cas général des problèmes NP-complets, même quand les contraintes ne sont pas des ensembles infinis. Une technique pour détecter l'inconsistance d'un CSP consiste à le transformer en un CSP équivalent satisfaisant une propriété de consistance locale telle que l'arc-consistance ou la chemin-consistance. Pour cela de nombreux algorithmes ont été présentés. Nous pouvons citer les algorithmes AC-1, AC-2 qui transforment un CSP en un CSP équivalent arc-consistant, PC-1 (fig. 1.2) et PC-2 (fig. 1.3) qui transforment un CSP en un CSP équivalent chemin-consistant. Ces algorithmes sont étudiés en détail dans [MF85]. PC-1

Algorithme PC-1
Entrée : un CSP (V, D, C), avec $|V| = n$.
début
  $C' \leftarrow C$
  faire
    début
    $C \leftarrow C'$
    pour $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
        pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
          $C'_{ij} \leftarrow C_{ij} \cap (C_{ik} \otimes C_{kk} \otimes C_{kj})$
    fin
  jusqu'à ce que $C' = C$
  $C \leftarrow C'$
fin

FIG. 1.2: *L'algorithme PC-1*

et PC-2 sont basés sur le même schéma et consistent à itérer l'opération de triangulation :

$$C_{ij} \leftarrow C_{ij} \cap (C_{ik} \otimes C_{kk} \otimes C_{kj}),$$

jusqu'à ce qu'un point fixe soit obtenu. PC-2 est plus optimisé et fait moins d'opérations de triangulations que PC-1. Si les contraintes du CSP contiennent un nombre fini de valeurs alors PC-1 et PC-2 sont de complexité en temps, respectivement $O(|V|^5)$ et $O(|V|^3)$. De plus, nous signalons que si la composition $\otimes$ est distributive sur l'intersection $\cap$ alors PC-1 n'effectue qu'une seule itération [Mon74]. Ceci est très intéressant dans le cas où les contraintes sont infinies, car quand cette propriété est vérifiée nous sommes sûr que PC-1 et PC-2 ne s'exécute pas indéfiniment mais en $O(|V|^3)$. Comme nous nous en doutons, puisque le problème de la consistance est un problème NP-complet et que nous pouvons en temps polynomial transformer un CSP en un CSP équivalent chemin-consistant, un CSP chemin-consistant n'est pas forcément consistant. Dans le cadre du formalisme d'Allen, nous donnerons des exemples de CSP chemin-consistants mais non consistants.
Nous rappelons maintenant la notion de minimalité :

Définition 1.4.4 *Un CSP (V, D, C) est minimal ssi pour tout couple $(v_i, v_j) \in C_{ij}$, il existe*

Algorithme PC-2
Entrée : un CSP (V, D, C).

Fonction REVISE$((i,k,j))$
début
  $R \leftarrow C_{ij} \cap C_{ik} \otimes C_{kk} \otimes C_{kj}$
  si $R = C_{ij}$ **alors retourner faux**
  sinon début
      $C_{ij} \leftarrow R$
      retourner vrai
    fin
fin

Fonction CHEMINS_RELIES$((i,j))$
début
  Si $i < j$ **alors retourner**
    $\{(i,j,m) : i \leq m \leq n$ et $m \neq j\} \cup \{(m,i,j) : 1 \leq m \leq j$ et $m \neq i\}$
    $\{(j,i,m) : j < m \leq n\} \cup \{(m,j,i) : 1 \leq m < i\}$
  sinon retourner
    $\{(p,i,m) : 1 \leq p \leq m, 1 \leq m \leq n, \neg(p = i = m), \neg(p = m = k)\}$
fin

début
  $L \leftarrow \{(i,k,j) : i \leq j, \neg(i = k = j)\}$
  tant que L est non vide **faire**
    début
    retirer un chemin (i,k,j) de L
    si REVISE$((i,k,j))$ **alors** $L \leftarrow L \cup$ CHEMINS_RELIES((i,j))
    fin
fin

FIG. 1.3: *L'algorithme PC-2*

une instanciation consistante $v'_1, \ldots, v'_{|V|}$ *de* (V, D, C) *telle que* $v'_i = v_i$ *et* $v'_j = v_j$.

Moins formellement, un CSP est minimal si chaque valeur de chaque contrainte «participe» à au moins une instanciation consistante. À chaque CSP correspond un CSP équivalent et minimal ; le problème qui consiste à trouver ce CSP sera appelé le problème de la minimalité. Nous allons dans la section suivante nous focaliser sur les réseaux d'intervalles d'Allen et sur les réseaux de points qui sont des CSP particuliers. Comme nous le constaterons les différentes notions rappelées dans cette section mais utilisées dans le cadre des réseaux d'intervalles ne sont pas toujours définies exactement de la même manière. Il nous semblait donc judicieux de faire quelques rappels sur les CSP en général pour que le lecteur puisse mieux appréhender les différentes notions adoptées à propos des réseaux d'intervalles, même au risque de paraître un peu redondant.

1.5 Les réseaux d'intervalles et les réseaux de points

1.5.1 Les réseaux d'intervalles

Dans la structure d'Allen, les informations temporelles entre des intervalles sont représentées par des CSP particuliers : les réseaux d'intervalles. Les variables de ces CSP représentent des intervalles et les contraintes binaires sont des relations de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ représentant les relations possibles entre chaque paire d'intervalles. Formellement un réseau d'intervalles peut être défini de la manière suivante :

Définition 1.5.1 *Un réseau d'intervalles $\mathcal{N}$ est une structure (V, C) où V est un ensemble de variables $V_1, \ldots, V_{|V|}$ représentant des intervalles temporels et C est une application de $V \times V$ vers $2^{\mathcal{B}_{int}}$ représentant les contraintes ou les informations temporelles entre les intervalles. Pour simplifier, nous notons C_{ij} la relation $C(V_i, V_j)$. C est telle que :*

- *$\forall i \in 1, \ldots, |V|$, $C_{ii} = \{eq\}$, ceci exprime le fait que la seule relation possible entre un intervalle et lui-même est bien sûr l'égalité ;*
- *$\forall i, j \in 1, \ldots, |V|$, $C_{ij} = C_{ji}{}^{\smile}$, ceci correspond au fait que si un premier intervalle est dans une certaine relation avec un second intervalle alors obligatoirement la relation du second avec le premier est la relation inverse.*

La relation C_{ij} contient les relations atomiques permises ou possibles entre les deux intervalles V_i et V_j, nous pouvons donc représenter des informations temporelles incertaines. Le cas où nous n'avons aucune contrainte entre deux intervalles V_i et V_j est exprimé par le fait que C_{ij} est la relation totale ψ. Un réseau d'intervalles permet donc aussi de représenter des informations incomplètes.
Bien qu'une contrainte d'un réseau d'intervalles représente une infinité de valeurs pour un couple de deux variables, elle est définie par un nombre fini de relations atomiques. Comme nous pourrons le constater dans la suite elle sera uniquement manipulée à travers ces relations atomiques (ou symboles), c'est pour cela que parfois nous parlons de CSP symboliques ou qualitatifs à propos des réseaux d'intervalles. À notre avis cette abstraction est l'avantage majeur du formalisme d'Allen.
Les différentes notions que nous avons rappelées dans la section précédente au sujet des CSP telles que la consistance ou la chemin-consistance ont été raffinées, voire redéfinies, pour les réseaux d'intervalles. D'autres notions ont été introduites. Nous allons les rappeler brièvement en introduisant les notations que nous utiliserons dans la suite :

Définition 1.5.2 *Soit $\mathcal{N}=(V, C)$ un réseau d'intervalles.*

- *Une instanciation de $\mathcal{N}$ est une application de V vers l'ensemble des intervalles. Nous noterons $m(V_i)$ ou bien m_i l'intervalle associé à V_i par m et $m(V_i, V_j)$ ou bien m_{ij} la relation atomique de $\mathcal{B}_{int}$ satisfaite par m_i et m_j.*
- *Une instanciation m de $\mathcal{N}$ est consistante pour $\mathcal{N}$ ssi pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, nous avons $m_{ij} \in C_{ij}$.*
- *Un scénario s de $\mathcal{N}$ est une application de $V \times V$ vers $\mathcal{B}_{int}$ telle que pour tous les $i, j \in 1, \ldots, |V|$, $s_{ij} \in C_{ij}$.*

- *Un scénario s de $\mathcal{N}$ est consistant pour $\mathcal{N}$ ssi il existe une instanciation consistante m de $\mathcal{N}$ telle que $s_{ij} = m_{ij}$ pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$.*

- *$\mathcal{N}$ est consistant si et seulement s'il admet une instanciation consistante.*

- *$\mathcal{N}$ est minimal si et seulement si pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$ et $A \in C_{ij}$, il existe un scénario consistant s de $\mathcal{N}$ tel que $s_{ij} = A$.*

- *Un réseau d'intervalles $\mathcal{N}' = (V', C')$ est un sous-réseau de $\mathcal{N}$ ssi $V' = V$ et pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, $C'_{ij} \subseteq C_{ij}$.*

Il est facile de voir que pour toute instanciation consistante il existe un scénario consistant et que pour tout scénario consistant il existe une infinité d'instanciations consistantes. Et donc, étant donné une instanciation, ce qui fait qu'elle est consistante ou non est totalement déterminé par la relation d'ordre entre les bornes des intervalles qu'elle a alloués aux variables. Seul compte donc l'aspect qualitatif pour la notion de consistance des réseaux d'intervalles.
Un réseau d'intervalles est toujours 1-consistant et arc-consistant (dans le cas où il n'a pas la relation vide comme contrainte). En effet, chaque domaine des variables d'un réseau n'est jamais vide puisqu'il correspond à l'ensemble des intervalles réels. De plus, pour tout intervalle X et tout relation atomique $A \in \mathcal{B}_{int}$ il est toujours possible de trouver un autre intervalle Y tel que $X\ A\ Y$.
La propriété de chemin-consistance est définie grâce à l'opération de composition ($\circ$) définie sur $2^{\mathcal{B}_{int}}$:

Définition 1.5.3 *Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un réseau d'intervalles, $\mathcal{N}$ est chemin-consistant si, et seulement si, $C_{ij} \subseteq C_{ik} \circ C_{kj}$ pour tout $i, j, k \in 1, \ldots, |V|$.*

Cette définition est équivalente à celle des CSP puisque l'opération de composition $\circ$ – qui a les propriétés de la composition relationnelle traditionnelle – correspond à l'opération $\otimes$ de la section précédente pour des contraintes exprimées par des relations de $2^{\mathcal{B}_{int}}$. Nous remarquons que dans l'inclusion $C_{ij} \subseteq C_{ik} \circ C_{kj}$, l'expression de droite est simplifiée par rapport aux CSP généraux. Ceci vient du fait que pour tout $k \in 1, \ldots, |V|$, $C_{kk} = \{eq\}$ et que pour toute relation $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$, $R \circ \{eq\} = \{eq\} \circ R = R$. Et donc nous avons $C_{ik} \circ C_{kk} \circ C_{kj}$ qui se simplifie par $C_{ik} \circ C_{kj}$.

Exemple À des fins d'illustration, considérons les informations temporelles suivantes relatives à quatre processus machines p_1, p_2, p_3 et p_4. p_2 ne débute pas avant p_1. p_1 se déroule pendant p_3. p_3 débute avant que p_2 ne commence et ne se termine pas au moment où p_2 débute. p_4 termine p_3 ou (ou exclusif) le contraire. En représentant chaque processus p_i par une variable V_i ces informations sont représentées par le réseau d'intervalles $\mathcal{N} = (V, C)$ de la figure 1.4. Une instanciation consistante m de $\mathcal{N}$ est aussi représentée dans cette figure. Nous remarquons que $\mathcal{N}$ n'est pas chemin-consistant. En effet $C_{42} \not\subseteq C_{43} \circ C_{32} = \{b, a, o, oi, di, si, m, mi, eq, f, fi\}$.

1.5.2 Les réseaux de points

Vilain et Kautz utilisent aussi des CSP pour stocker les informations temporelles entre un ensemble de points. Les variables de ces CSP représentent des points, et chacune de leurs

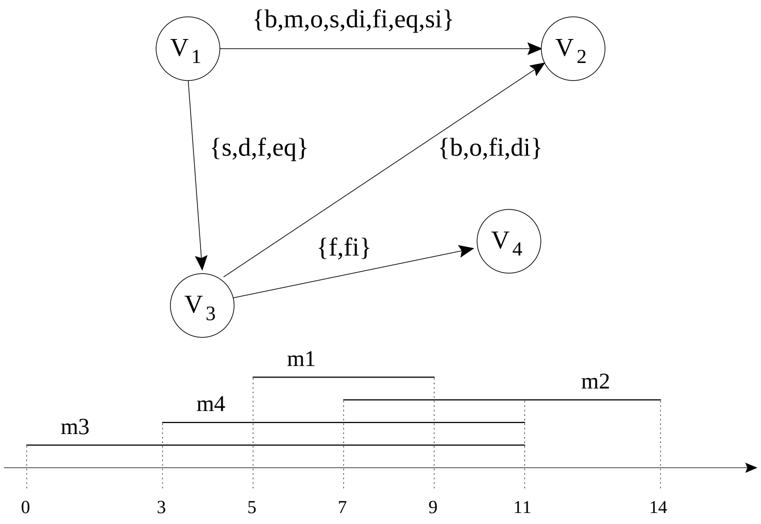


FIG. 1.4: *Un réseau d'intervalles $\mathcal{N}$ et une instanciation consistante m de $\mathcal{N}$.*

contraintes est spécifiée par une relation de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$. Formellement, un tel CSP que nous appelons réseau de points peut être défini de la manière suivante :

Définition 1.5.4 *Un réseau de points $\mathcal{N}$ est une structure (V, C) où V est un ensemble de variables $V_1, \ldots, V_{|V|}$ représentant des points et C est une application de $V \times V$ vers $2^{\mathcal{B}_{pt}}$ représentant les contraintes sur les positions relatives entre les points. C est telle que :*

- $\forall i \in 1, \ldots, |V|$, $C_{ii} = \{=\}$,
- $\forall i, j \in 1, \ldots, |V|$, $C_{ij} = C_{ji}{}^{\smile}$.

Une instanciation d'un réseau de points $\mathcal{N} = (V, C)$ est une application m qui associe à toute variable V_i de V un point de la droite m_i. Hormis cette différence, les autres notions introduites à propos des réseaux d'intervalles : instanciation consistante, réseau chemin-consistant, réseau minimal, sous-réseaux, *etc* ... , sont définies pour les réseaux de points de la même manière. Les réseaux de points sont moins expressifs que les réseaux d'intervalles. En effet, tout réseau de points $\mathcal{N} = (V, C)$ peut s'exprimer de manière équivalente à l'aide d'un réseau d'intervalles $\mathcal{N}' = (V', C')$. Pour cela nous introduisons pour chaque variable V_i de V une variable V_i' dans V. Et pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, la relation C'_{ij} est obtenue en remplaçant dans la relation C_{ij} les relations atomiques $<$, $>$, $=$ par respectivement b, a et eq. À partir d'une instanciation consistante de $\mathcal{N}$ nous pouvons construire une instanciation consistante de $\mathcal{N}'$ et réciproquement. Comme nous le verrons dans la suite, tout réseau d'intervalles ne peut pas s'exprimer par un réseau de points.

1.5.3 Les problèmes sur les réseaux des intervalles et des points

Allen [All81, All83] utilise la méthode de la chemin-consistance pour détecter l'inconsistance d'un réseau d'intervalles. Pour cela il utilise un algorithme de propagation de contraintes similaire à PC-2 dans lequel l'opération de triangulation est remplacée par :

$$C_{ij} \leftarrow C_{ij} \cap (C_{ik} \circ C_{kj}).$$

L'algorithme utilisé a une complexité en temps de $O(n^3)$ et en espace de $O(n^2)$ avec n le nombre de variables du réseau d'intervalles. Cette méthode est saine pour le problème de la consistance puisqu'elle ne retire des contraintes du réseau d'intervalles initial que des relations atomiques ne participant pas à des scénarios consistants. Par contre, elle ne retire pas toutes les relations atomiques ne participant pas à des instanciations consistantes et donc n'est pas complète. Nous pouvons facilement exhiber des réseaux d'intervalles chemin-consistants mais non consistants. Dans la figure 1.5 se trouve l'exemple donné par Allen d'un tel réseau. En fait

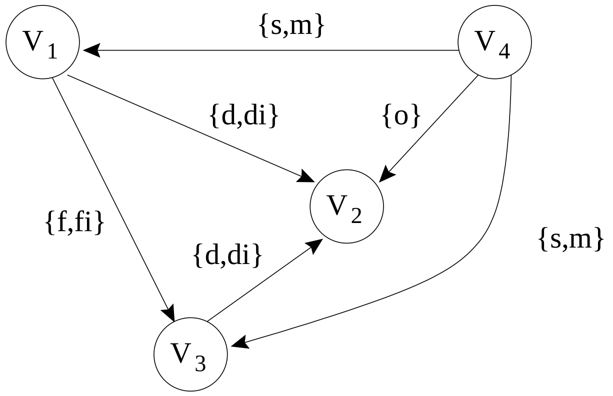


FIG. 1.5: *Un réseau d'intervalles chemin-consistant et inconsistant.*

le problème de la consistance des réseaux d'intervalles est un problème NP-complet [2], il n'y a donc rien d'étonnant à ce que la méthode polynomiale de la chemin-consistance ne soit pas complète. La preuve de ce résultat de complexité a été donnée en premier par Vilain et Kautz [VK86, VKB90]. Pour cela ils ont exhibé une réduction polynomiale du problème NP-complet 3–SAT [GJ79] vers le problème de la consistance des réseaux d'intervalles. Ce dernier étant NP du fait que nous pouvons vérifier si une instanciation est consistante ou non en temps polynomial, nous en déduisons qu'il est NP-complet. Van Beek [Bee90a] donne une autre preuve en exhibant une réduction polynomiale du problème du coloriage de graphes [GJ79] vers le problème de la consistance des réseaux d'intervalles. Il en résulte que les problèmes de recherche d'une instanciation consistante, de trouver un scénario consistant (problème du scénario consistant) et le problème de la minimalité sont des problèmes NP-difficiles.
Fort de ce résultat, de nombreuses études ont eu pour but de trouver et d'analyser des fragments de l'ensemble des relations de AI pour lesquels le problème de la consistance des réseaux d'intervalles est polynomial [VK86, VKB90, BC90, Bee90b, Nok91, Bee92, NB95, Lig94, Lig96, DJ96], et en particulier pour lesquels la méthode de la chemin consistance est complète. Dans la suite de ce chapitre nous présenterons différents fragments traitables trouvés, en nous focalisant uniquement sur ceux contenant les 13 relations atomiques.
Avant cela, montrons que le problème de la consistance, le problème de la minimalité, le problème de recherche d'un scénario consistant d'un réseau d'intervalles sont polynomialement réductibles les uns aux autres.
Supposons que nous ayons un oracle qui, en temps polynomial, réponde au problème de la consistance. Pour résoudre le problème de la minimalité en temps polynomial d'un réseau

2. Dans la suite, quand nous dirons qu'un des problèmes posés sur les réseaux d'intervalles est polynomial ou NP-complet, c'est implicitement en complexité en temps.

sur le fragment considéré, il suffit d'opérer de la manière suivante. Pour chaque contrainte on détermine parmi ses relations atomiques celles qui peuvent participer à un scénario consistant. Pour cela on remplace cette contrainte successivement par chacune de ses relations atomiques. Puis on teste la consistance du réseau obtenu à l'aide de l'oracle. Si le réseau est consistant alors la relation atomique ayant pris la place de la contrainte fait partie du réseau minimal équivalent au réseau initial, sinon elle n'en fait pas partie. Grâce à cette méthode, nous déterminons pour chaque contrainte la contrainte minimale correspondant en au plus 13 appels de l'oracle. Ainsi, nous pouvons construire le réseau minimal équivalent avec au plus $13 \times n \times (n-1)/2$ appels de l'oracle, avec n le nombre de variables[3], elle est donc polynomiale en temps. En utilisant une méthode quasi similaire nous pouvons construire une solution du problème du scénario consistant en temps polynomial. Pour cela, on teste la consistance du réseau initial à l'aide de l'oracle. Si le réseau est consistant on construit un scénario consistant de la façon suivante : pour chaque contrainte du réseau initial, on remplace la contrainte par une de ses relations atomiques, puis on teste la consistance du réseau obtenu, ceci jusqu'à ce que l'on obtienne un réseau consistant. Ensuite on remplace la contrainte du réseau initial par la relation composée de la dernière relation atomique testée et on passe à la contrainte suivante. Après au plus $13 \times n \times (n-1)/2$ remplacements et tests de consistance nous obtenons un réseau qui correspond à un scénario consistant. Une réponse du problème de la minimalité, de celui du scénario consistant et de celui de l'instanciation consistante apportent une réponse immédiate à celui de la consistance. De plus nous verrons dans la section suivante qu'étant donné un scénario consistant nous pouvons construire en temps polynomial une instanciation consistante. De tout ceci, nous concluons que si l'un des problèmes est polynomial pour des réseaux d'intervalles dont les contraintes sont restreintes à un ensemble $\mathcal{E}$ de relations contenant les 13 relations atomiques alors les trois autres problèmes le sont aussi. C'est une des raisons pour lesquelles dans certains papiers les auteurs se sont focalisés uniquement sur un seul des problèmes, et en particulier sur celui de la consistance. De plus, notons que ce résultat peut s'appliquer aussi bien aux réseaux de points, qu'aux CSP dont les contraintes sont discrètes.

Étant donné un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ (resp. de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$), nous noterons $\overline{\mathcal{E}}$ le plus petit ensemble pour l'inclusion de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ (de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$) stable pour les opérations intersection, composition et inverse. Si $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$ alors nous dirons que $\mathcal{E}$ est une sous-classe de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ (resp. de $2^{\mathcal{B}_{pt}}$).

Étant donné un ensemble $\mathcal{E}$ de relations de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ (resp. $2^{\mathcal{B}_{pt}}$), les réseaux d'intervalles (resp. de points) sur $\mathcal{E}$ désignent les réseaux d'intervalles (resp. de points) dont les contraintes appartiennent toutes à $\mathcal{E}$. Du fait que dans un réseau d'intervalles (resp. de points), la contrainte entre une variable et elle-même est la relation $\{eq\}$ (resp. $\{=\}$) et celle entre deux variables V_i, V_j est l'inverse de celle entre V_j et V_i, implicitement $\mathcal{E}$ est stable pour l'opération inverse et contient la relation $\{eq\}$ (resp. $\{=\}$).

À propos de la relation entre la complexité du problème de la consistance des réseaux sur un fragment $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{B}_{int}}$ et la complexité du problème de la consistance des réseaux sur le fragment

3. Il y a en fait n^2 contraintes mais nous savons que la contrainte entre une même variable est la relation $\{eq\}$ et celle entre deux variables V_i et V_j est l'inverse de celle entre V_j et V_i. C'est pour cela que nous analysons uniquement $n \times (n-1)/2$ contraintes.

$\overline{\mathcal{E}}$, Nebel *et al.* démontrent dans [NB95] le résultat suivant :

Théorème 1.5.1 *Soit $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{B}_{int}}$ tel que $\{eq\}$ et $\psi \in \mathcal{E}$. Tout problème de consistance d'un réseau d'intervalles ayant pour contraintes des relations dans $\overline{\mathcal{E}}$ peut être traduit polynomialement en problème de consistance d'un réseau d'intervalles ayant pour contraintes des relations dans $\mathcal{E}$.*

Et ainsi, nous pouvons en déduire que le problème de la consistance est polynomial sur $\mathcal{E}$ si, et seulement si, il est polynomial sur le fragment $\overline{\mathcal{E}}$, pourvu que $\mathcal{E}$ contienne la relation identité et la relation totale.

Nous avons vu précédemment que le problème de la consistance des réseaux d'intervalles est un problème NP-complet dans le cas général. Concernant les réseaux de points il en va tout autrement, en effet le problème de la consistance, ainsi que les problèmes de la minimalité et de l'instanciation consistante, sont des problèmes polynomiaux. De plus, comme nous le verrons dans la section suivante, la méthode de la chemin-consistance résout le problème de la consistance.
Du fait de tout ceci, il devient évident que dans le cas général un réseau d'intervalles ne peut pas s'exprimer par un réseau de points.
La fin de ce chapitre s'organise ainsi : dans la section suivante nous discuterons plus en détails de la traitabilité de l'algèbre des points. Puis nous passerons en revue les ensembles traitables importants de l'algèbre des intervalles. Enfin nous conclurons.

1.6 Traitabilité de l'algèbre des points

La méthode de la chemin-consistance est une méthode de décision pour le problème de la consistance des réseaux de points [VK86]. Nous avons ainsi une méthode en $O(n^3)$ pour résoudre ce problème, avec n le nombre de variables du réseau.
Van Beek [Bee90b] propose un algorithme plus performant : CSPAN (Consistent Scenario algorithm for PA Networks). CSPAN est en $O(n^2)$ et est basé sur les algorithmes classiques de manipulation de graphes [AHU82]. Étant donné un réseau de points $\mathcal{N} = (V, C)$ (avec $|V| = n$), il consiste en les étapes suivantes :

- Étape 1 : On construit le graphe orienté étiqueté $G = (V, A)$ de la manière suivante : pour tout $i, j \in 1, \dots, n$, si $C_{ij} \in \{\{<\}, \{<, =\}, \{=\}\}$ alors le couple (V_i, V_j) appartient à A et est étiqueté par la relation C_{ij}, sinon il n'y a pas d'arc entre V_i et V_j. Cette étape est en $O(n^2)$.

- Étape 2 : On calcule les composantes fortement connexes $S = S_1, \dots, S_m$ du graphe $G = (V, A)$ $(O(n^2))$.

- Étape 3 : On construit le graphe orienté étiqueté $G' = (S, A')$. Pour tout $i, j \in 1, \dots, m$, $(S_i, S_j) \in A'$ et est étiqueté par la relation $\bigcap\{C_{kl} : V_k \in S_i \text{ et } V_l \in S_j\}$. Cette «condensation» peut aussi être réalisée en $O(n^2)$.
  À la fin de cette étape nous sommes en mesure de dire si $\mathcal{N}$ est consistant ou non. En effet, Van Beek montre que $\mathcal{N}$ est inconsistant ssi il existe $i, j \in 1, \dots, m$, tels que $A'_{ij} = \emptyset$. Cette situation se présente lorsque :

  - il existe $i, j \in 1, \dots, n$, tels que $C_{ij} = \{<, >\}$, alors que V_i et V_j appartiennent à une même composante fortement connexe et donc seule la contrainte $\{=\}$ peut être satisfaite entre ces deux variables,

– il existe un cycle $V_i < \ldots < V_j < \ldots < V_i$ (avec $i, j \in 1, \ldots, n$ dans le graphe G ; un tel cycle fait que $\mathcal{N}$ est bien évidemment inconsistant.

Si l'inconsistance du réseau de points $\mathcal{N}$ n'a pas été détectée alors on réalise l'étape suivante pour trouver une instanciation consistante.

– Étape 3 : On remplace chaque étiquette de la forme $\{<, =\}$ des arcs G' par l'étiquette $\{<\}$. En effectuant cette opération nous n'introduisons pas de cycle avec des arcs étiquetés par $\{<\}$, $\{<, =\}$ (remarquons qu'il ne peut pas y avoir d'arcs étiquetés par $\{=\}$ dans A'), ainsi il n'y a pas d'introduction d'inconsistance. Puis on réalise un tri topologique sur G' en utilisant uniquement les arcs étiquetés par $\{<\}$. À partir de la relation d'ordre total obtenu sur les sommets $S_1, \ldots, S_m$ on construit une instanciation consistante de $\mathcal{N}$ en valuant chaque variable $V_i \in V$ par la valeur attribuée à S_k, avec $V_i \in S_k$. Cette étape est aussi en $O(n^2)$.

Le lecteur peut se reporter à la thèse de Van Beek [Bee90a] pour plus de détails sur cet algorithme. Nous disposons ainsi d'un algorithme rapide pour résoudre le problème de la consistance des réseaux de points.

Concernant le problème de la minimalité, Vilain et Kautz affirmaient dans [VK86] que la méthode de la chemin-consistance résout ce problème pour un réseau dans AP. Van Beek [Bee89] montre que cette affirmation est erronée en exhibant le contre-exemple se trouvant dans la figure 1.6. Ce réseau est un contre-exemple puisque, comme nous pouvons le vérifier, il

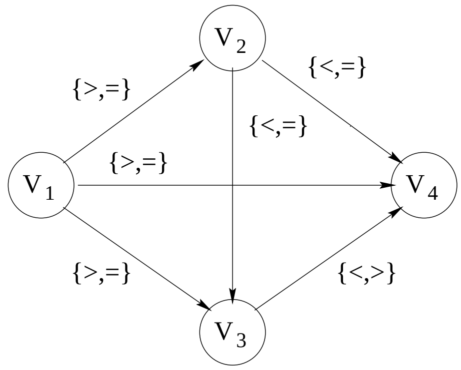


FIG. 1.6: *Un réseau de points chemin-consistant mais non minimal*

est chemin-consistant mais il n'est pas minimal. En effet, la relation atomique = appartenant à la contrainte entre les variables V_1 et V_2 ne peut jamais être satisfaite par une instanciation consistante et n'appartient donc à aucun scénario consistant. Pour s'en convaincre supposons qu'il existe une instanciation consistante m du réseau telle que $m_1 = m_2$. m_3 doit satisfaire les contraintes $m_3 \leq m_1$ et $m_3 \geq m_2$, il en résulte que nécessairement $m_3 = m_1 = m_2$. De la même façon, m_4 doit être égal à la fois à m_1 et à m_2. Il s'ensuit que $m_3 = m_4$. Et comme m_3 et m_4 doivent être différents du fait de la contrainte $\{<, >\}$ entre les deux variables V_3 et V_4, il y a une contradiction et m ne peut être une instanciation consistante.

Van Beek établit que tout réseau de points $\mathcal{N} = (V, C)$ chemin-consistant non minimal contient un sous-réseau de 4 points (c'est-à-dire un réseau de 4 variables inclus dans V et dont les contraintes sont celles de C restreintes à ces 4 variables) isomorphe à ce contre-exemple. Fort de ce résultat, il propose un algorithme de complexité en temps $O(n^4)$ qui transforme un réseau de points en un réseau équivalent chemin-consistant et 4-consistant qui se trouve être le réseau minimal du réseau initial [Bee89]. Nous signalons aussi qu'il fournit une autre méthode [Bee90a] de complexité $O(max(mn^2, n^3))$ – avec m le nombre de contraintes égale à $\{<, >\}$ et n toujours le nombre de variables – permettant aussi d'obtenir le réseau minimal d'un réseau de points. Cette méthode consiste à appliquer la méthode de la chemin-consistance, puis à détecter et à modifier tous les sous-réseaux isomorphes au contre-exemple précédent. Son principal avantage par rapport à la méthode précédente est son coût en temps qui est proportionnel au nombre de contraintes $\{<, >\}$ obtenues après la chemin-consistance, ce nombre étant faible en pratique.
Nous avons vu que dans le cas général, la méthode de la chemin-consistance ne résout pas le problème de la minimalité. Par contre, si nous nous restreignons à des réseaux de points dont les contraintes appartiennent à l'ensemble des relations convexes (ou parfois appelées continues) de PA :

$$AP_{\mathcal{C}} = 2^{\mathcal{B}_{pt}} \setminus \{<, >\} = \{\emptyset, \{<\}, \{>\}, \{=\}, \{<, =\}, \{>, =\}, \{<, =, >\}\},$$

nous pouvons affirmer que la méthode de la chemin-consistance est complète. En effet, $AP_{\mathcal{C}}$ est stable pour les opérations : intersection, inverse et composition. Et donc après application de la chemin-consistance sur un réseau dont les contraintes appartiennent à $AP_{\mathcal{C}}$ nous obtenons obligatoirement un réseau de points dont les contraintes sont aussi dans $AP_{\mathcal{C}}$. Le réseau obtenu est minimal puisqu'il ne peut pas contenir le sous-réseau du contre-exemple de la figure 1.6. Sans utiliser cette argumentation, Van Beek donne une autre preuve en prouvant le résultat plus fort : tout réseau de points chemin-consistant dont les contraintes appartiennent à $AP_{\mathcal{C}}$ est fortement n-consistant, c'est-à-dire k-consistant pour k allant de 1 à n, avec n le nombre de variables du réseau. Ainsi pour toute instanciation partielle consistante nous pouvons construire une instanciation consistante pour ces réseaux de points. Une autre propriété intéressante est que la chemin-consistance pour ces réseaux de points peut être effectuée à l'aide de PC1 avec juste une itération. Ceci provient du fait que dans $AP_{\mathcal{C}}$ la composition distribue sur l'intersection, pourvue que l'intersection ne soit pas vide. En d'autres termes:

$$\forall R, S, T \in AP_{\mathcal{C}}, R \cap S \neq \emptyset \Rightarrow T \circ (R \cap S) = (T \circ R) \cap (T \circ S).$$

Avant de débuter notre tour d'horizon des sous-classes traitables de l'algèbre des intervalles, nous résumons les principaux résultats vus précédemment :

Propriété 1.6.1

- *Les problèmes de la consistance, de l'instanciation consistante, et de la minimalité sont polynomiaux pour les réseaux de points (de AP).*
- *Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un réseau de points chemin-consistant.*
  - *Si $\forall i, j \in 1, \ldots, |V|$, $C_{ij} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{N}$ est consistant sinon il est inconsistant.*
  - *De plus, si $\forall i, j \in 1, \ldots, |V|$, $C_{ij} \in AP_{\mathcal{C}}$, alors $\mathcal{N}$ est fortement $|V|$-consistant et donc minimal.*

1.7 Les ensembles traitables de l'algèbre des intervalles

Présentons maintenant les ensembles traitables les plus importants de AI.

1.7.1 L'ensemble des relations singletons

Le premier sous-ensemble de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ contenant les 13 relations atomiques qui est à considérer est l'ensemble des 13 relations de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ ne contenant qu'une seule relation atomique. Nous remarquons tout d'abord que cet ensemble n'est pas une sous-classe puisque la composition de deux relations atomiques n'est pas forcément une relation singleton.
Dans [VP87] Valdés-Pérez affirme que tout réseau d'intervalles chemin-consistant ne contenant que des relations atomiques est consistant. La méthode de la chemin-consistance résout donc le problème de la consistance des réseaux d'intervalles dont les contraintes sont des relations ne contenant chacune qu'une seule relation atomique de $\mathcal{B}_{int}$. Mais comme le fait remarquer Valdés-Pérez à juste titre, il existe une méthode plus rapide (en $O(n^2)$, avec n le nombre d'intervalles du réseau) qui consiste à traduire chaque contrainte exprimée par une relation atomique en contraintes de «précédence» ($<$) et de «coïncidence» ($=$) sur les bornes des intervalles, puis de résoudre cet ensemble d'inégalités strictes et d'égalités. Pour cela, nous pouvons utiliser par exemple l'algorithme CSPAN vu dans la section précédente. Ce dernier peut être simplifié du fait que dans le cas présent les contraintes sont toutes de la forme $\{<\}$, $\{>\}$ ou bien $\{=\}$. Ainsi nous pouvons utiliser un algorithme de la forme suivante :

- Étape 1 : On construit le graphe non orienté $G = (V, E)$ de la façon suivante : $V = \{\text{bornes des intervalles}\}$ et $(x, y) \in E$ ssi «$x = y$» appartient à l'ensemble des inégalités et égalités à résoudre.

- Étape 2 : On calcule les composantes connexes $S = S_1, \ldots, S_m$ de G.

- Étape 3 : On construit le graphe orienté $G' = (V', E')$ de la façon suivante : $V' = S$ et $(S_i, S_j) \in E$ si, et seulement si, $\exists x \in S_i$ et $\exists y \in S_j$ tels «$x < y$» appartient à l'ensemble des inégalités et égalités à résoudre.

- Étape 4 : On teste si G' a un cycle, si c'est le cas alors il n'y a pas de solution. Sinon on effectue un tri topologique sur G' obtenant ainsi un ordre total sur S à partir duquel on construit une solution.

Nous pouvons montrer que cet algorithme a une complexité similaire à CSPAN, c'est-à-dire, $O(n^2)$. Notons que dans le cas où le réseau initial est consistant il fournit une instanciation consistante. Ainsi, à partir d'un scénario consistant nous pouvons construire une instanciation consistante en temps polynomial.
Dans le cas général, étant donné un réseau d'intervalles, pour résoudre le problème de la consistance, nous pouvons toujours dans le pire des cas tester la consistance de chaque scénario possible de ce réseau pour tenter d'en trouver un de consistant. Ceci peut être effectué par un algorithme brutal de retour en arrière sur échec (backtracking) et à l'aide de l'algorithme précédent, avec une complexité exponentielle en $O(2^{n^2})$. Un tel algorithme peut aussi être utilisé pour résoudre les trois autres problèmes.

1.7.2 La sous-classe des relations convexes ($\mathcal{C}$)

Nökel [Nok91] utilise une représentation géométrique des relations de AI (déjà utilisée dans [Rit88]) pour définir la propriété de convexité. Nous allons dans un premier temps rappeler cette représentation.
Un intervalle réel $X = (X^-, X^+)$ est représenté dans le plan cartésien réel par le point d'abscisse X^- et d'ordonnée X^+. L'ensemble des intervalles réels correspond ainsi au demi-plan d'équation $y > x$ (avec x l'abscisse et y l'ordonnée). Étant donné un intervalle de référence $X_0 = (X_0^-, X_0^+)$, une relation atomique A de $\mathcal{B}_{int}$ est représentée par la région du plan $Reg(A, X_0)$ définie par :

$$Reg(A, X_0) = \{(Y^-, Y^+) \in \mathbb{R}^2 : (X_0^-, X_0^+)\ A\ (Y^-, Y^+)\}.$$

Les régions obtenues sont : un point pour eq, des demi-droites et segments pour f, fi, s, si, m, mi et des portions du plan pour d, di, o, oi, b, a. Elles sont représentées dans la figure 1.7. La repré-

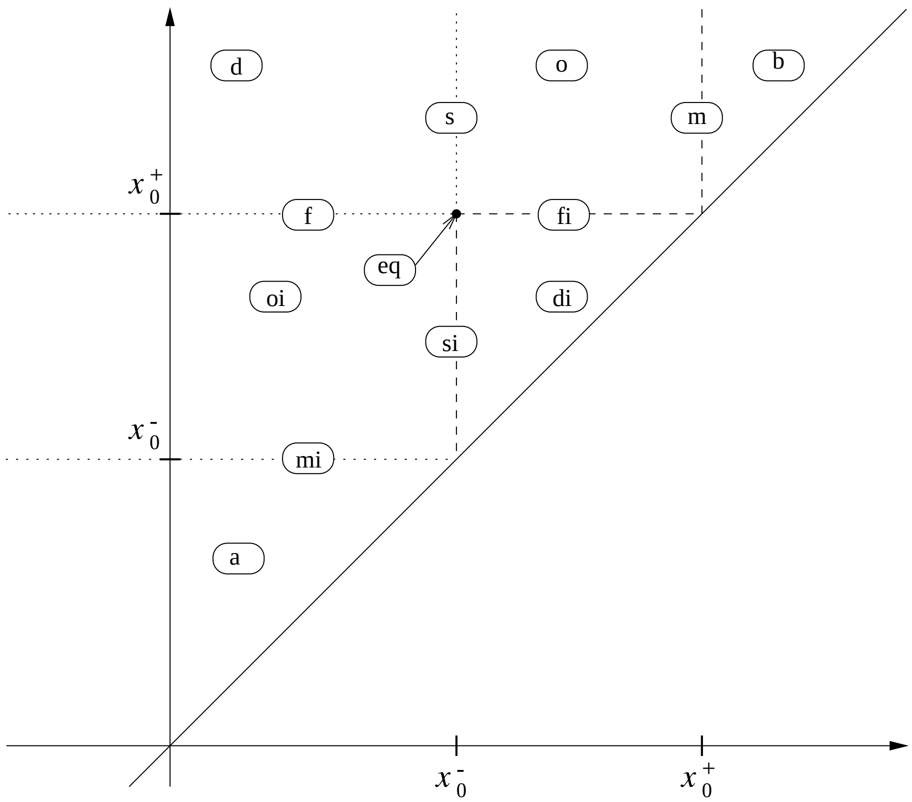


FIG. 1.7: *La représentation géométrique des relations atomiques de $\mathcal{B}_{int}$.*

sentation d'une relation R de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ est l'union des régions représentant ses relations atomiques : $Reg(R, X_0) = \cup\{Reg(A, X_0) : A \in R\}$. Par exemple, dans les figures 1.8 (a) et (b) sont respectivement représentées les relations $\{oi, si, di\}$ et $\{oi, b\}$. Étant donnée une région Reg du plan, nous noterons Reg_1 (resp. Reg_2) la projection orthogonale de Reg sur le premier (resp.

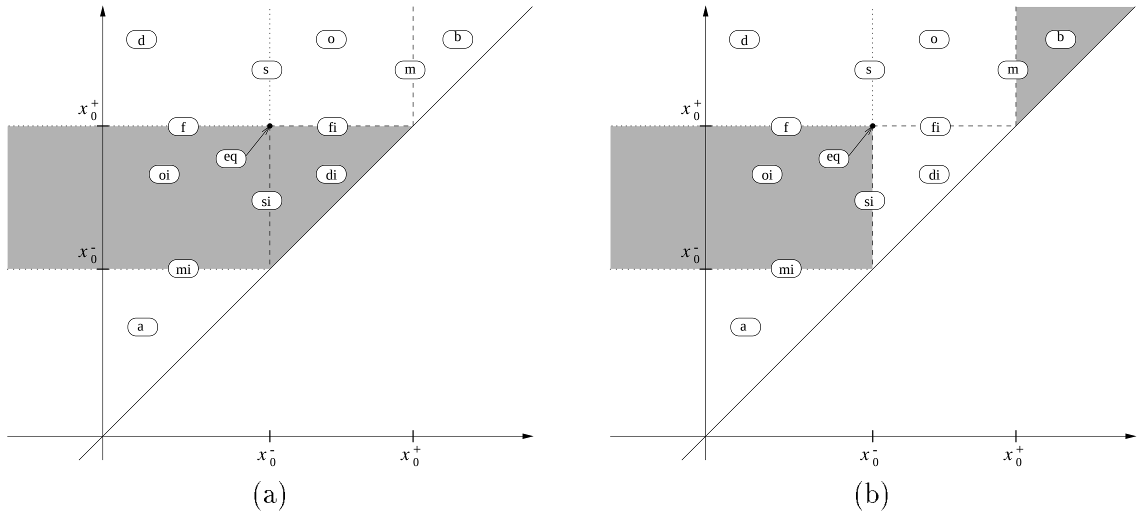


FIG. 1.8: *Représentations géométriques des relations* $\{oi, si, di\}$ *(a) et* $\{oi, b\}$ *(b).*

le second) axe. La notion de convexité est définie par Nökel de la manière suivante :

Définition 1.7.1 *Soit* $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$. *R est convexe ssi pour tout intervalle* $X_0 = (X_0^-, X_0^+) \in \mathbb{R}^2$,

$$Reg(R, X_0) = (Reg(R, X_0)_1 \times Reg(R, X_0)_2) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}.$$

Dans cette formule, nous pouvons en fait remplacer l'expression «pour tout intervalle» par «il existe un intervalle», car le choix de l'intervalle de référence ne modifie en aucune manière la notion de convexité capturée par cette définition. À l'aide de la figure 1.8, nous pouvons facilement constater que la relation $\{oi, si, di\}$ est une relation convexe tandis que la relation $\{oi, b\}$ n'en est pas une.

Les relations convexes peuvent être caractérisées d'une manière moins géométrique et sans doute plus pratique en utilisant un treillis : le treillis des intervalles. Ce treillis peut être construit de plusieurs manières. Nous allons présenter ici celle de Ligozat [Lig91, Lig94, BIL96] qui nous semble la plus directe.

Ligozat associe dans un premier temps à chaque relation atomique de $\mathcal{B}_{int}$ un couple d'entiers de la façon suivante. Étant donné un intervalle $Y = (Y^-, Y^+)$, cet intervalle délimite 5 zones de la droite des réels numérotées de 0 à 4 :

- *zone* $0 = \{Z \in \mathbb{R} : Z < Y^-\}$,
- *zone* $1 = \{Y^-\}$,
- *zone* $2 = \{Z \in \mathbb{R} : Y^- < Z < Y^+\}$,
- *zone* $3 = \{Y^+\}$ et
- *zone* $4 = \{Z \in \mathbb{R} : Y^+ < Z\}$.

Étant donné un intervalle $X = (X^-, X^+)$, la relation atomique A de $\mathcal{B}_{int}$ satisfaite entre X et Y est caractérisée par le couple d'entiers (z_1, z_2) où z_1 est la zone dans laquelle se trouve la borne X^- et z_2 celle où se trouve X^+. Par exemple, si X *starts* Y, nous avons $X^- = Y^-$

et $Y^- < X^+ < Y^+$, par conséquent $X^- \in zone\ 1$ et $X^+ \in zone\ 2$, le couple d'entiers $(1,2)$ est ainsi attribué à la relation atomique *starts*. À partir de ces couples d'entiers est définie sur $\mathcal{B}_{int}$ une relation d'ordre $\leq$:

Définition 1.7.2 *Soient $A, B \in \mathcal{B}_{int}$ et leurs couples d'entiers respectifs (a_1, a_2) et (b_1, b_2).*

$$A \leq B \text{ si, et seulement si, } a_1 \leq b_1 \text{ et } a_2 \leq b_2.$$

$(\mathcal{B}_{int}, \leq)$ défini un treillis distributif que nous appelons : le treillis des intervalles (voir la figure 1.9). Les relations convexes de AI peuvent être déterminées à partir de ce treillis, en effet nous

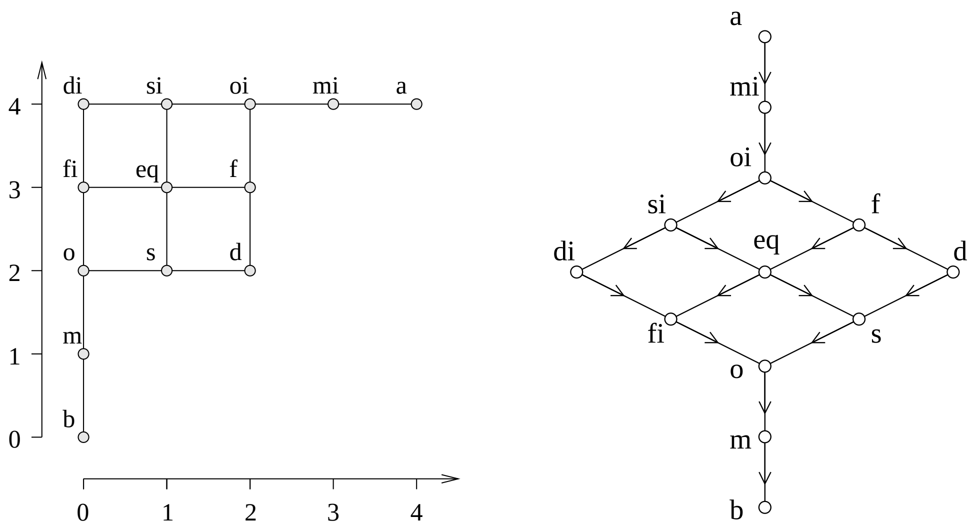
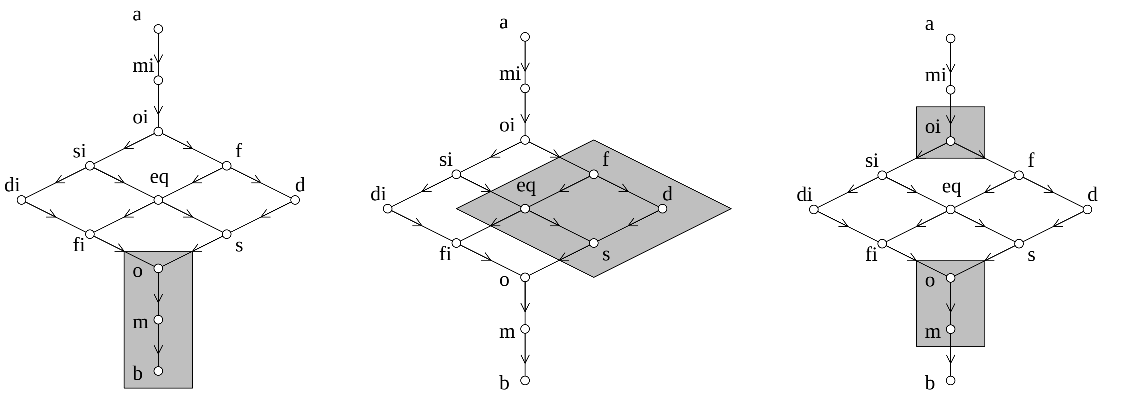


FIG. 1.9: *Le treillis des intervalles $(\mathcal{B}_{int}, \leq)$.*

avons la propriété suivante :

Propriété 1.7.1 *Les relations convexes de AI correspondent aux intervalles du treillis des intervalles.*

Exemple Considérons les trois relations $\{b, o, m\}$, $\{eq, s, d, f\}$ et $\{o, m, oi\}$ schématisées à l'aide de parties grisées sur les trois dessins suivants :



Nous constatons facilement que les relations $\{b, o, m\}$ et $\{eq, s, d, f\}$ sont des relations convexes puisqu'elles correspondent respectivement aux intervalles $[b, o]$ et $[s, f]$ du treillis des intervalles, tandis que la relation $\{o, m, oi\}$ n'est pas convexe car elle ne correspond à aucun des intervalles du treillis.

Le treillis des intervalles traduit aussi une «continuité» entre les relations atomiques de AI. En effet, deux relations atomiques A et B sont adjacentes dans le treillis si, et seulement si, étant donnés deux intervalles X et Y satisfaisant A, en déplaçant à droite ou à gauche une des quatre bornes de ces intervalles de manière continue, nous pouvons faire en sorte que $X\ B\ Y$ et ceci sans que X et Y ne satisfassent une autre relation atomique que A lors du déplacement. Par exemple, supposons que nous ayons deux intervalles $X = (X^-, X^+)$ et $Y = (Y^-, Y^+)$ satisfaisant la relation atomique *starts*. En décalant la borne X^+ vers la droite (dans le sens croissant des valeurs réelles), de manière continue nous pouvons constater que $X\ s\ Y$ puis $X\ eq\ Y$ lorsque $X^+ = Y^+$. Les deux relations atomiques s et eq sont ainsi adjacentes dans le treillis. Nökel [Nok91] appelle cette continuité la «1-point-convexité» et s'en sert pour construire le treillis des intervalles. Freksa [Fre91] appelle cette notion : «le voisinage conceptuel». Cette notion lui permet entre autres choses de faire un raisonnement approximatif en regroupant des relations atomiques «conceptuellement voisines» en une seule relation. Par exemple, il regroupe les relations atomiques s, si, eq en une seule relation qu'il prend comme relation atomique.
Parmi les 8192 relations de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ il y a 83 relations convexes (y compris la relation vide), soit un peu plus de 1% de l'algèbre totale. La liste de ces relations se trouve en annexe dans la section B.1.2. Nous pouvons remarquer que toutes les relations issues de la composition de deux relations atomiques de $\mathcal{B}_{int}$ sont des relations convexes. L'ensemble des relations convexes que nous noterons $\mathcal{C}$ est une sous-classe de $2^{\mathcal{B}_{int}}$, en effet nous avons la propriété suivante :

Propriété 1.7.2 *[Bee90a] L'ensemble $\mathcal{C}$ des relations convexes de AI est stable pour les opérations : intersection, composition et inverse.*

Dans la littérature nous n'avons trouvé aucune preuve de cette propriété. Mais en calculant exhaustivement l'inverse d'une relation convexe, la composition et l'intersection de deux relations convexes, nous constatons que nous obtenons uniquement des relations convexes. Ligozat nous a communiqué une preuve analytique de la stabilité des relations convexes de AI. Dans cette preuve il utilise des propriétés algébriques de la structure d'Allen ainsi que du treillis des intervalles. Une autre propriété intéressante est que dans $\mathcal{C}$ la composition distribue sur l'intersection dans le cas où l'intersection n'est pas vide [Bee90a]. Ainsi, nous pouvons en déduire que l'algorithme PC1 n'effectue qu'une seule itération s'il a en entrée un réseau de AI n'ayant que des relations convexes comme contraintes.
Dans la suite nous dirons qu'un réseau d'intervalles est convexe lorsqu'il a pour contraintes uniquement des relations convexes de AI.
Tout réseau d'intervalles convexes peut être traduit de manière équivalente en réseau des points dont les contraintes appartiennent à $AP_{\mathcal{C}}$ (les variables de ces réseaux correspondent aux bornes). En effet, chaque contrainte convexe entre deux intervalles peut être traduite en une conjonction de contraintes sur leurs bornes exprimées à l'aide des relations de $AP_{\mathcal{C}}$.

Exemple Considérons la relation convexe $\{b, o, m\}$. La contrainte $X\ \{b, o, m\}\ Y$, avec X et Y deux variables représentant des intervalles, peut être exprimée grâce à l'ensemble de contraintes de l'algèbre des points : $X^-\ \{<\}\ X^+$, $Y^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^-\ \{<\}\ Y^-$, $X^-\ \{<\}\ Y^+$,

$X^+ \{<,=,>\} Y^-$, $X^+ \{<\} Y^+$.

Fort de ce fait, nous pouvons en déduire que le problème de la consistance est polynomial pour les réseaux d'intervalles convexes. En effet, étant donné un réseau convexe d'intervalles, pour savoir s'il est consistant ou non, il suffit de le traduire en réseau de l'algèbre des points sans la relation $\{<,>\}$, ceci peut être fait en temps polynomial à l'aide d'une table de traduction. Puis il suffit de tester la consistance de ce réseau grâce à des algorithmes polynomiaux comme CSPAN (voir la sous-section précédente) ou la méthode de la chemin-consistance. Nous avons donc un fragment traitable de AI. Van Beek *et al.* [BC90] démontrent que comme pour l'ensemble des relations continues dans AP, nous avons pour les relations convexes de AI la propriété suivante :

Propriété 1.7.3 *Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un réseau de l'algèbre des intervalles. Si $\mathcal{N}$ est convexe et chemin-consistant alors $\mathcal{N}$ est fortement $|V|$-consistant et minimal.*

Il s'ensuit que la méthode de la chemin-consistance résout le problème de la minimalité des réseaux convexes de AI.

1.7.3 La sous-classe des relations pointisables ($\mathcal{P}$)

Nous avons vu que les relations convexes peuvent être exprimées de manière équivalente dans l'algèbre des points, et ceci uniquement à l'aide des relations continues de $AP_{\mathcal{C}}$. La question qui se pose immédiatement est : existe-t-il d'autres relations de AI exprimables de manière équivalente dans AP ? La réponse est oui. En effet, en utilisant la relation des points $\{<,>\}$ en plus de celles de $AP_{\mathcal{C}}$ nous pouvons exprimer d'autres relations de AI que les relations convexes.

Exemple Considérons la relation de $2^{\mathcal{B}_{int}}$: $\{b, o\}$. $\{b, o\}$ n'est pas une relation convexe mais elle peut s'exprimer dans AP grâce à la relation $\{<,>\}$: la contrainte $X \ \{b, o\} \ Y$, avec $X = (X^-, X^+)$ et $Y = (Y^-, Y^+)$, est équivalente à l'ensemble des contraintes de AP : $X^-\{<\}X^+$, $Y^-\{<\}Y^+$, $X^-\{<\}Y^-$, $X^-\{<\}Y^+$, $X^+\{<,>\}Y^-$ et $X^+\{<\}Y^+$.

Par contre toutes les relations de AI ne peuvent pas se traduire dans AP, il suffit de considérer l'exemple suivant :

Exemple Soit la relation de $2^{\mathcal{B}_{int}}$: $\{eq, o\}$. En exprimant la contrainte $X \ \{eq, o\} \ Y$ en contraintes sur les bornes de X et Y nous obtenons les contraintes suivantes : $X^-\{<\}X^+$, $Y^-\{<\}Y^+$, $X^-\{<,=\}Y^-$, $X^+\{>\}Y^-$, $X^-\{<\}Y^+$, $X^+\{<,=\}Y^+$, ($X^-\{<\}Y^-$ ou $X^+\{=\}Y^+$), ($X^+\{<\}Y^+$} ou $X^-\{=\}Y^-$). Les deux dernières contraintes ne sont pas des contraintes de AP car ce sont des disjonctions de contraintes de AP faisant intervenir quatre variables distinctes. Même en essayant d'exprimer la relation $\{eq, o\}$ en contraintes sur ses bornes d'une manière différente nous retombons systématiquement sur de telles contraintes. $\{eq, o\}$ ne peut donc pas être traduite dans AP.

Étant donnée une contrainte $X \ R \ Y$ de AI, une technique simple pour savoir si $X \ R \ Y$ est traduisible en contraintes de AP consiste à, dans un premier temps, construire les plus fortes (resp. les plus petites) contraintes de AP sur les bornes de X et Y impliquées par $X \ R \ Y$. Puis ensuite de vérifier si la plus forte (resp. plus petite) contrainte de AI impliquée par l'ensemble des contraintes de AP obtenues coïncide avec $X\ R\ Y$. Si c'est le cas alors les contraintes sur AP trouvées et $X\ R\ Y$ sont équivalentes, sinon $X\ R\ Y$ ne peut être traduite dans AP.

Exemple Reprenons les deux exemples précédents pour illustrer cette méthode.

- En utilisant le tableau 1.1, nous savons que les plus fortes contraintes de AP impliquées par $X\ \{b\}\ Y$ sont[4] $X^-\ \{<\}\ X^+$, $Y^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^-\ \{<\}\ Y^-$, $X^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^+\ \{<\}\ Y^-$, $X^+\ \{<\}\ Y^+$, tandis que celles impliquées par $X\ \{o\}\ Y$ sont $X^-\ \{<\}\ X^+$, $Y^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^-\ \{<\}\ Y^-$, $X^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^+\ \{>\}\ Y^-$, $X^+\ \{<\}\ Y^+$. Il s'ensuit que les plus fortes contraintes impliquées par $X\ \{b, o\}\ Y$ sont $X^-\ \{<\}\ X^+$, $Y^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^-\ \{<\}\ Y^-$, $X^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^+\{<,>\}Y^-$, $X^+\ \{<\}\ Y^+$. Toujours à l'aide du tableau 1.1 nous pouvons construire la plus forte contrainte $X\ R\ Y$ de AI impliquée par cet ensemble de contraintes. En effet, une relation atomique appartient à R ssi elle satisfait les contraintes de AP trouvées. Ainsi, R est la relation $\{b, o\}$. Il s'ensuit que $\{b, o\}$ est pointisable et est équivalente à l'ensemble de contraintes de AP que nous avons construit.
- Les plus fortes contraintes de AP impliquées par $X\ \{eq\}\ Y$ sont $X^-\ \{<\}\ X^+$, $Y^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^-\ \{=\}\ Y^-$, $X^-\ \{<\}\ Y^+$, $X^+\ \{>\}\ Y^-$, $X^+\ \{=\}\ Y^+$. Il en résulte que celles impliquées par $X\ \{eq, o\}\ Y$ sont $X^-\ \{<\}\ X^+, Y^-\ \{<\}\ Y^+, X^-\{<,=\}\ Y^-, X^-\ \{<\}\ Y^+, X^+\ \{>\}\ Y^-, X^+\ \{<,=\}\ Y^+$. La plus petite contrainte de AI impliquée par ces dernières est $X\ \{o, oi, s, si, eq\}\ Y$. Nous pouvons en conclure que $\{eq, o\}$ n'est pas une relation pointisable.

Il y a au total 188 relations de l'algèbre des intervalles (en comptant les relations convexes) pouvant être traduites de manière équivalente dans l'algèbre des points. On appelle ces relations : les relations pointisables et on les dénote par l'ensemble $\mathcal{P}$. Elles sont énumérées dans [BC90, Bee90a]. $\mathcal{P}$ est aussi une sous-classe de $2^{\mathcal{B}_{int}}$, en effet $\mathcal{P}$ est stable pour les trois opérations fondamentales : composition, intersection et inverse.
Nous appelons réseau pointisable un réseau dont les contraintes appartiennent à $\mathcal{P}$. Comme le problème de la consistance dans AP est polynomial et que tout réseau d'intervalles pointisables peut s'exprimer par un réseau des points (via une traduction polynomiale), le problème de la consistance des réseaux pointisables est polynomial. La méthode de la chemin-consistance est aussi complète pour le problème de la consistance des réseaux pointisables [VK86]. Par contre elle n'est pas complète pour le problème de la minimalité [Bee89]. Van Beek donne en exemple le réseau pointisable de la figure 1.10 qui est chemin-consistant mais non minimal. En effet, la relation atomique m entre V_3 et V_1 ne peut pas être satisfaite par une instanciation consistante.

1.7.4 La sous-classe des relations ORD-Horn ($\mathcal{H}$)

Dans [NB94, NB95] Nebel et Bürckert caractérisent des relations de AI pouvant se traduire par des ensembles de contraintes particulières sur les bornes des intervalles : les clauses ORD-Horn. Le choix de cette appellation deviendra évident après la présentation de la définition

4. Lorsque la contrainte entre un point P_1 et un autre point P_2 est donnée, nous ne donnons pas la contrainte inverse entre P_2 et P_1.

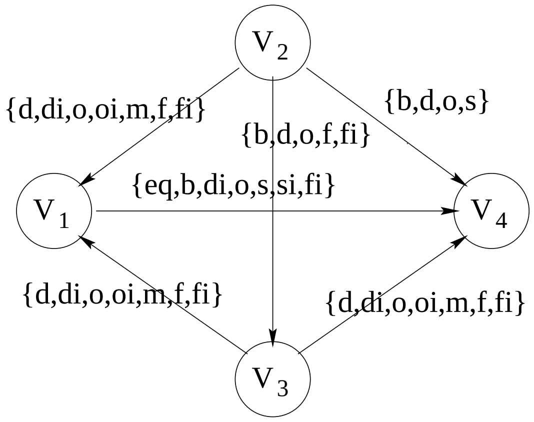


FIG. 1.10: *Réseau pointisable chemin-consistant mais non minimal.*

de ces clauses.
Nebel et Bürckert définissent une formule atomique par les formules $x \leq y$ et $x = y$, où x et y dénotent des bornes d'intervalles. Un littéral est une formule atomique ou sa négation. Nous obtenons ainsi deux sortes de littéraux positifs : $x \leq y$, $x = y$ et deux sortes deux littéraux négatifs : $x \not\leq y$ $(\neg(x \leq y))$, $x \neq y$ $(\neg(x = y))$. Une clause est une disjonction de littéraux. Une clause est appelée clause ORD si elle ne contient pas le littéral $x \not\leq y$. Du fait que la formule $x \not\leq y$ est équivalente à la conjonction $x \leq y \wedge x \neq y$, Nebel *et al.* font remarquer que toute contrainte des intervalles peut toujours être exprimée par une conjonction de clauses ORD. En effet, étant donnée une contrainte $X\ R\ Y$ avec $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$ et X, Y deux intervalles, en utilisant le tableau 1.1 nous pouvons l'exprimer avec une disjonction de conjonctions de contraintes sur les bornes de X et Y. Dans cette formule, on remplace les contraintes du type $x < y$ par la conjonction équivalente $x \leq y \wedge x \neq y$. Il ne reste plus qu'à distribuer le «ou» $(\vee)$ sur le «et» $(\wedge)$ pour obtenir une conjonction de clauses ORD équivalente à notre contrainte $X\ R\ Y$.

Exemple Soit la contrainte $X\ \{o, d\}\ Y$. En utilisant le tableau 1.1 nous obtenons les contraintes sur les bornes de X et Y exprimée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}&(X^- < X^+ \wedge Y^- < Y^+ \wedge X^- < Y^- \wedge X^- < Y^+ \wedge Y^- < X^+ \wedge X^+ < Y^+) \vee \\ &\qquad (X^- < X^+ \wedge Y^- < Y^+ \wedge Y^- < X^- \wedge X^- < Y^+ \wedge Y^- < X^+ \wedge X^+ < Y^+)\end{aligned}$$

Après avoir remplacé les littéraux contenant $<$ nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned}&(X^- \leq X^+ \wedge X^- \neq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge Y^- \neq Y^+ \wedge X^- \leq Y^- \wedge X^- \neq Y^- \wedge \\ &\quad X^- \leq Y^+ \wedge X^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^+ \wedge Y^- \neq X^+ \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+) \vee \\ &\quad (X^- \leq X^+ \wedge X^- \neq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge Y^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^- \wedge Y^- \neq X^- \wedge \\ &\qquad X^- \leq Y^+ \wedge X^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^+ \wedge Y^- \neq X^+ \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+)\end{aligned}$$

Et enfin après distribution de $\wedge$ sur $\vee$ et quelques simplifications nous obtenons une conjonction de clauses ORD équivalente à $X\ \{o,d\}\ Y$:

$$X^- \leq X^+ \wedge X^- \neq X^+ \wedge Y^- \leq Y^+ \wedge Y^- \neq Y^+ \wedge X^- \leq Y^+ \wedge X^- \neq Y^+ \wedge Y^- \leq X^+ \wedge \\ Y^- \neq X^+ \wedge X^+ \leq Y^+ \wedge X^+ \neq Y^+ \wedge X^- \neq Y^- \wedge (X^- \leq Y^- \vee Y^- \leq X^-)$$

Les relations pointisables de AI peuvent s'exprimer par une conjonction de clauses ORD unitaires, c'est-à-dire contenant uniquement un littéral. Les relations convexes ont la particularité de pouvoir s'exprimer par une conjonction de clauses unitaires satisfaisant en plus la propriété suivante : si $x \neq y$ appartient à la conjonction alors une des deux clauses suivantes appartient aussi à la conjonction : $x \leq y$, $y \leq x$.
Les clauses ORD-Horn sont les clauses ORD ayant au plus un littéral positif ($a \leq b$ ou $a = b$). Nebel et Bürckert définissent l'ensemble des relations ORD-Horn de AI de la manière suivante :

Définition 1.7.3 *Une relation $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$ est une relation ORD-Horn ssi R peut s'exprimer de manière équivalente par un ensemble (une conjonction) de clauses ORD-Horn.*

L'ensemble des relations ORD-Horn est dénoté par $\mathcal{H}$. Il contient 868 relations dont les relations convexes et pointisables ce qui fait à peu près 10% du nombre total de relations de AI. $\mathcal{H}$ est stable pour les opérations d'intersection, d'inverse et de composition, c'est donc une sous-classe de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ [NB95].
Dans la suite, nous appellerons réseau d'intervalles ORD-Horn un réseau de AI ayant pour contraintes uniquement des relations de $\mathcal{H}$. Nebel et Bürckert montrent qu'un ensemble de contraintes exprimé par des clauses ORD-Horn admet une instanciation consistante ssi l'union de cet ensemble de clauses ORD-Horn et d'un ensemble de clauses de Horn propositionnelles (axiomatisant $=$ comme une relation d'équivalence et $\leq$ comme un ordre partiel) est satisfaisable. Comme la satisfaisabilité d'un ensemble de clauses propositionnelles de Horn est décidable en temps polynomial par rapport au nombre de clauses qu'il contient, nous pouvons en déduire que le problème de la consistance d'un ensemble de contraintes exprimées à l'aide de clauses ORD-Horn est aussi polynomial. Ainsi, le problème de la consistance des réseaux ORD-Horn est polynomial. Concernant la propriété de la chemin-consistance Nebel et Bürckert prouvent le résultat suivant :

Propriété 1.7.4 *Tout réseau ORD-Horn des intervalles chemin-consistant est consistant ssi il n'a pas la relation vide comme contrainte.*

Ainsi la méthode de la chemin-consistance est complète pour le problème de la consistance des réseaux ORD-Horn. De plus, Nebel et Bürckert prouvent un résultat très important : la sous-classe $\mathcal{H}$ est la sous-classe maximale traitable de AI contenant les 13 relations atomiques et la relation totale [5]. Ainsi pour tout ensemble $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{B}_{int}}$ contenant les 13 relations atomiques et la relation totale, soit le problème de la consistance des réseaux d'intervalles ayant pour contraintes des relations de $\mathcal{E}$ est NP-complet, soit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}$. Ceci ne veut pas dire qu'il n'existe pas de sous-ensembles de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ de cardinalité plus grande que celle de $\mathcal{H}$ et traitable. En effet, dans [DJ96] sont caractérisées des sous-classes de tailles plus grandes et traitables mais ne

5. Comme nous utilisons des réseaux d'intervalles pour représenter les contraintes entre les intervalles nous sommes obligés de rajouter l'appartenance de la relation totale dans les conditions, voir [NB95] pour plus de détails.

contenant pas les 13 relations atomiques et la relation totale.
Nous allons décrire succinctement la méthode employée par Nebel *et al.* pour obtenir ce résultat de maximalité. Tout d'abord il montre que pour tout ensemble $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{B}_{int}}$ contenant la relation totale et la relation $\{eq\}$, le problème de la consistance des réseaux d'intervalles dont les contraintes appartiennent à $\mathcal{E}$ est polynomial (resp. NP-complet) si, et seulement si, le problème de la consistance des réseaux d'intervalles dont les contraintes appartiennent à $\overline{\mathcal{E}}$[6] est polynomial (resp. NP-complet). Dans un second temps, ils prouvent que pour tout sous-ensemble $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{B}_{int}}$ contenant l'un des sous-ensembles suivants : $\{\{b, di, o, m, fi\}, \{b, d, o, m, s\}, \{d, di, oi, di, f\}\}$, $\{\{b, di, o, m, fi\}, \{b, d, o, m, s\}, \{di, o, oi, si, fi\}\}$, le problème de la consistance des réseaux d'intervalles dont les contraintes sont dans $\mathcal{E}$ est NP-complet. Puis en générant par ordinateur toutes les sous-classes de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ contenant les 13 relations atomiques ils constatent que toutes celles qui ne sont pas incluses dans $\mathcal{H}$ contiennent la relation $\{d, di, oi, si, f\}$ ou $\{di, o, oi, si, fi\}$. Nous signalons que ceci a été montré d'une manière analytique par Ligozat [Lig98a] sans l'aide de machine. Or, ces sous-classes contiennent aussi les relations $\{b, di, o, m, fi\}$ et $\{b, d, o, m, s\}$ car celles-ci appartiennent à la sous-classe générée par l'ensemble des 13 relations atomiques. Il s'ensuit que pour toutes ces sous-classes qui ne sont pas incluses dans $\mathcal{H}$ le problème de la consistance est NP-complet. Par conséquent pour tout sous-ensemble de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ non inclus dans $\mathcal{H}$ contenant les 13 relations atomiques et la relation totale le problème de la consistance est aussi NP-complet.
La sous-classe $\mathcal{H}$ est donc l'un des sous-ensembles les plus intéressants de $2^{\mathcal{B}_{int}}$. En introduisant la notion de préconvexité Ligozat caractérise les relations ORD-Horn d'une manière différente de celle employée par Nebel et Bürckert : les relations préconvexes. Nous utiliserons et étendrons certaines des notions introduites par Ligozat pour cette caratérisation. Pour cette raison, nous allons dans la section suivante présenter les relations préconvexes.

1.7.5 Les relations préconvexes

Ligozat [Lig94, Lig96, BIL96] représente les relations de AI dans le plan d'une manière similaire à celle de Nökel (voir sous-section 1.7.2), à une différence près. En effet, étant donnés un intervalle de référence $X_0 = (X_0^-, X_0^+)$ et une relation atomique $A \in \mathcal{B}_{int}$, Ligozat définit la région du plan $Reg(A, X_0)$ par $\{(Y^-, Y^+) \in \mathbb{R}^2 : (Y^-, Y^+)\ A\ (X_0^-, X_0^+)\}$ tandis que nous rappelons que Nökel la définit par $\{(Y^-, Y^+) \in \mathbb{R}^2 : (X_0^-, X_0^+)\ A\ (Y^-, Y^+)\}$.
À partir de cette représentation géométrique Ligozat introduit la notion de dimension et de fermeture topologique d'une relation de AI de la façon suivante :

Définition 1.7.4 *Soient $A \in \mathcal{B}_{int}$ et $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$.*

- *La dimension de A, notée $dim(A)$, est la dimension de la région $Reg(A, X_0)$, avec $X_0 = (X_0^-, X_0^+)$ et $X_0^- < X_0^+$.*
- *$dim(R) = max\{dim(A) : A \in R\}$.*
- *La fermeture topologique de A, notée $C(A)$ est la relation S de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ telle que $Reg(S, X_0)$ est la fermeture topologique de $Reg(A, X_0)$, avec $X_0 = (X_0^-, X_0^+)$ et $X_0^- < X_0^+$.*
- *$C(R) = \bigcup\{dim(A) : A \in R\}$.*

6. Nous rappelons que $\overline{\mathcal{E}}$ est la plus petite sous-classe (ensemble stable pour les opérations $\smile, \circ, \cap$) contenant l'ensemble $\mathcal{E}$.

A	$dim(A)$	$C(A)$	A	$dim(A)$	$C(A)$
b	2	$\{b, m\}$	a	2	$\{a, mi\}$
o	2	$\{o, m, fi, s, eq\}$	oi	2	$\{oi, mi, f, si, eq\}$
d	2	$\{d, eq, f, s\}$	di	2	$\{di, eq, fi, si\}$
m	1	$\{m\}$	mi	1	$\{mi\}$
s	1	$\{s, eq\}$	si	1	$\{si, eq\}$
f	1	$\{f, eq\}$	fi	1	$\{fi, eq\}$
eq	0	$\{eq\}$			

TAB. 1.4: *Dimension et fermeture topologique de $\mathcal{B}_{int}$.*

Ligozat ne définit pas la dimension de la relation vide, mais par extension nous pouvons prendre $dim(\emptyset) = -1$.

Exemple La dimension de la relation atomique eq est donc 0 puisqu'elle est représentée par un point tandis que celle de o est 2 car la région représentative de o est de dimension 2. Nous avons $dim(\{o, m, d, eq\}) = max\{2, 1, 2, 0\} = 2$ (voir fig. 1.11). La fermeture topologique de o est la relation des intervalles $\{o, m, s, fi, eq\}$ car la fermeture topologique de la région représentant o est la région correspondant à cette relation. De plus, $C(\{o, m, d, eq\}) = \{o, m, s, fi, eq, d, f\}$.

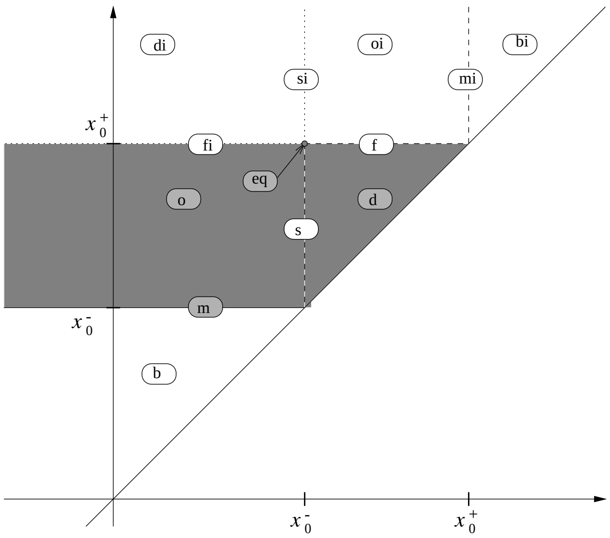


FIG. 1.11: *La représentation géométrique de la relation $\{o, m, d, eq\}$.*

La dimension et la fermeture topologique de chaque relation de $\mathcal{B}_{int}$ sont données dans le tableau 1.4. Nous récapitulons quelques propriétés des opérateurs dim et C de AI :

Fait 1.7.1 *Soient R et S deux relations de $2^{\mathcal{B}_{int}}$.*

(a) $dim(R^{\smile}) = dim(R)$,

(b) si $R \subseteq S$ alors $dim(R) \leq dim(S)$,

(c) $R \subseteq C(R)$ *et* $C(C(R)) = C(R)$,

(d) $C(R^{\smile}) = C(R)^{\smile}$,

(e) $C(R) \circ C(S) \subseteq C(R \circ S)$,

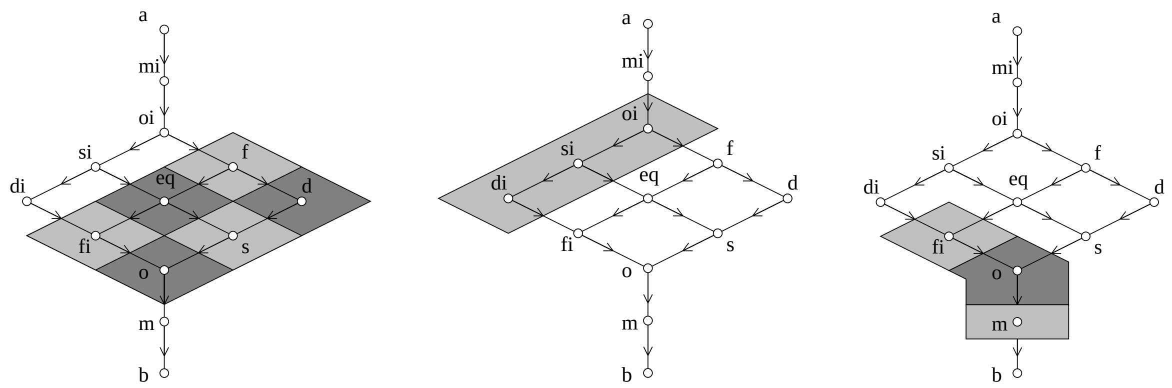
(f) $dim(C(R) \setminus R) < dim(R)$.

L'inclusion réciproque de (e) n'est pas vraie. Pour s'en convaincre il suffit de prendre comme contre-exemple $C(m) \circ C(m)$ qui est égal à $m \circ m = \{b\}$, tandis que $C(m \circ m) = C(\{b\}) = \{m, b\}$. La propriété (f) vient du fait que pour calculer la fermeture topologique d'une relation atomique $A \in \mathcal{B}_{int}$ nous ajoutons à la relation $\{A\}$ uniquement des relations atomiques de dimension strictement inférieure à celle de A.
Ligozat introduit un autre opérateur : la fermeture convexe et le définit de la manière suivante :

Définition 1.7.5 *Soit* $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$. *La fermeture convexe de* R*, notée* $I(R)$*, est la plus petite relation convexe de* $2^{\mathcal{B}_{int}}$ *contenant* R.

Comme les relations convexes de AI coïncident avec les intervalles du treillis des intervalles $(\mathcal{B}_{int}, \leq)$, de manière équivalente, la fermeture convexe de R peut se définir par la relation correspondant au plus petit intervalle du treillis des intervalles contenant R.

Exemple Nous avons $I(\{fi, s, f\}) = [o, f] = \{o, s, fi, eq, d, f\}$, $I(\{di, si, oi\}) = [di, oi] = \{di, si, oi\}$ et $I(\{fi, m\} = [m, fi] = \{m, o, fi\}$ (voir la figure 1.12).



$I(\{fi, s, f\})$ $I(\{di, si, oi\})$ $I(\{fi, m\}$

FIG. 1.12: *Exemples de fermetures convexes.*

La fermeture convexe d'une relation quelconque est bien sûr une relation convexe, elle satisfait aussi les propriétés suivantes :

Fait 1.7.2 *Soient* $R, S \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$.

(a) $I(R^{\smile}) = I(R)^{\smile}$,

(b) $I(I(R)) = I(R)$,

(c) si R *est convexe alors* $I(R) = R$,

(d) si $R \subseteq S$ *alors* $I(R) \subseteq I(S)$*,*

(e) $I(R \circ S) = I(R) \circ (S)$*.*

Dans [Lig94] seule l'inclusion $I(R \circ S) \subseteq I(R) \circ (S)$ est signalée, par contre nous trouvons l'égalité (e) dans [Lig96, BIL96].
Grâce à toutes ces notions Ligozat définit les relations préconvexes :

Définition 1.7.6 *Une relation* $R \in 2^{\mathcal{B}_{int}}$ *est préconvexe si elle satisfait une des conditions équivalentes suivantes :*

(a) $C(R)$ *est une relation convexe.*

(b) $I(R) \subseteq C(R)$*.*

(c) $dim(I(R) \setminus R) < dim(R)$*.*

(d) $I(R) \setminus R$ *ne contient que des relations atomiques dites instables et qui correspondent à l'ensemble* $\{m, mi, s, si, f, fi, eq\}$ *(relations atomiques de dimension strictement inférieure à 2).*

Dans [Lig94] la définition des relations préconvexes n'utilise que la condition (a), dans [BIL96] sont utilisées les conditions (a), (b) et (c), tandis que dans [Lig96] Ligozat prend la condition (d) pour définir les relations préconvexes. Comme ces conditions sont équivalentes cela n'a que peu d'importance. Dans [Lig94] Ligozat montre que les relations préconvexes sont les relations ORD-Horn. Ainsi, nous avons une autre caractérisation de ces relations qui est intéressante par certains côtés. D'une part elle offre un critère rapide pour savoir si une relation quelconque de $2^{\mathcal{B}_{int}}$ est préconvexe (ou ORD-Horn, mais à partir de maintenant nous utiliserons uniquement le terme préconvexe) ou non. En effet, étant donnée une relation des intervalles R il est très facile de vérifier si sa fermeture topologique est convexe ou de vérifier si sa fermeture convexe privée de R ne contient que des relations atomiques strictement inférieures à R. Un autre avantage de cette nouvelle définition est qu'elle offre des nouveaux «outils» (fermeture topologique, fermeture convexe, dimension, *etc.*) permettant de prouver les propriétés des relations de ORD-Horn de manière analytique. Un exemple de cet avantage est la preuve que Ligozat donne [Lig94] pour démontrer la stabilité de $\mathcal{H}$ pour la composition. Cette preuve est moins compliquée que celle donnée par Nebel *et al.* dans [NB95]. Comme nous le verrons dans la suite, dans le formalisme que nous introduirons nous étendrons la notion de préconvexité.
Avant de clore cette sous-section nous rappelons un dernier résultat fourni par Ligozat qui nous sera utile par la suite. Une instanciation d'un réseau d'intervalles $\mathcal{N} = (V, C)$ est maximale si, et seulement si, pour tout i, j appartenant à $1, \ldots, |V|$, $dim(m_{ij}) = C_{ij}$. Ligozat montre la propriété suivante :

Théorème 1.7.1 *Soit* $\mathcal{N} = (V, C)$ *un réseau d'intervalles préconvexe et chemin-consistant. Soient un ensemble de variables* $V_1, \ldots, V_m$ *de* V*, avec* $m < n$ *et une intanciation partielle* m *maximale et consistante de* $\mathcal{N}$*. Pour toute variable* $V_{m+1} \in V \setminus \{V_1, \ldots, V_m\}$ *il existe une instanciation partielle* m' *sur* $V_1, \ldots, V_{m+1}$ *de* $\mathcal{N}$ *telle que* m' *soit consistante et telle que pour tout* $i \in 1, \ldots, m$*,* $m_i = m'_i$*.*

De ce théorème nous pouvons affirmer que tout réseau d'intervalles préconvexe et chemin consistant ne contenant pas la relation vide admet une instanciation consistante maximale.

1.8 Conclusion

Le formalisme qualitatif temporel d'Allen considère comme entités temporelles basiques les intervalles et comme relations qualitatives entre ces entités les 13 relations qui correspondent à tous les ordres possibles entre les bornes de deux intervalles de la droite. Les informations (ou contraintes) temporelles sont représentées par des réseaux de contraintes particuliers : les réseaux d'intervalles.
Les principaux problèmes qui se posent sont de savoir si un réseau d'intervalles est consistant ou bien de trouver un scénario consistant d'un réseau. Allen propose la méthode de la chemin-consistance pour résoudre ces problèmes. Ces derniers étant NP-complets de nombreux travaux ont eu pour but de trouver des fragments de AI pour lesquels ces problèmes sont polynomiaux. Parmi les fragments traitables découverts nous avons présenté la sous-classe des relations convexes, la sous-classe des relations pointisables et enfin la sous-classe des relations ORD-Horn (ou préconvexes). Cette dernière est la sous-classe maximale traitable contenant les 13 relations atomiques et la relation totale, il n'y a donc aucun espoir de trouver une sous-classe traitable satisfaisant ces critères et plus vaste que la sous-classe préconvexe.
Ce formalisme d'Allen a eu un énorme impact en intelligence artificielle et est encore très utilisé dans des domaines comme la planification ou la linguistique. Cet engouement est certainement dû à son aspect qualitatif. En effet, dans de nombreux domaines seul cet aspect des relations temporelles importe et l'aspect quantitatif est délaissé ou absent.
Malgré tout, dans certaines applications l'utilisation de relations métriques est indispensable. Pour continuer à profiter des avantages de l'algèbre d'Allen certains chercheurs ont étendu l'algèbre des intervalles en y intégrant un aspect quantitatif. Dans le chapitre suivant nous présenterons certaines de ces extensions.
Fort du succès de l'algèbre des intervalles dans le domaine temporel, de nombreux formalismes qualitatifs spatiaux se sont inspirés de celui d'Allen. En effet, comme nous le verrons de nombreux formalismes spatiaux sont basés sur des relations qualitatives et ont comme outil principal de raisonnement des méthodes similaires à celle de la chemin-consistance.

Chapitre 2

Contraintes temporelles métriques et mixtes

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons présenté le formalisme temporel d'Allen ainsi que l'algèbre des points de Vilain et Kautz grâce auxquels nous pouvons représenter des contraintes temporelles qualitatives entre, respectivement, des intervalles et des points. Ces contraintes sont représentées par des réseaux d'intervalles et des réseaux de points.
Dans ce chapitre, nous allons dans un premier temps nous intéresser à des CSP temporels dont les contraintes sont quantitatives, c'est-à-dire définies par des valeurs numériques. Nous étudierons tout particulièrement les réseaux temporels quantitatifs TCSP (Temporal Constraint Satisfaction Problems) et STP (Simple Temporal Problems) introduits par Dechter *et al.* [DMP91]. Les variables d'un TCSP représentent des points temporels et leurs domaines sont des valeurs réelles. Une contrainte entre deux variables est définie par l'union d'intervalles réels. Ces intervalles représentent toutes les valeurs possibles de la durée qui s'écoule entre les deux points représentés par les deux variables. Un STP est un TCSP dont les contraintes sont restreintes à un seul intervalle. Grâce à ces réseaux nous pouvons représenter des informations temporelles quantitatives du type : «Il est arrivé entre 8:00h et 8:30h» ou bien «Le processus dure au plus 20 minutes». Comme nous le verrons le problème de la consistance d'un TCSP est NP-complet en général tandis qu'il est polynomial pour les STP. Dans ce dernier cas, il peut être résolu à l'aide de la méthode de la chemin-consistance. Nous étudierons aussi une variante des STP : les STP$^{\neq}$, introduits par Gerevini et Cristani [GC97]. Un STP$^{\neq}$ est un STP pour lequel nous pouvons exclure un nombre fini de valeurs de chaque intervalle exprimant une contrainte. Le problème de la consistance des STP$^{\neq}$ est encore traitable.
La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée aux représentations temporelles mixtes qui permettent de représenter des contraintes qualitatives et numériques. Nombreux sont ceux qui ont voulu profiter à la fois de l'expressivité des contraintes qualitatives et de celle des contraintes quantitatives, d'où la création de modèles temporels dans lesquels coexistent ces deux types de contraintes. Certains ont même pris comme objets temporels primitifs de leur modèle à la fois des intervalles et des points. Nous présenterons deux modèles temporels typiques de cette démarche : le modèle de Meiri [Mei91] et le modèle de Kautz et Ladkin [KL91].

2.2 TCSP et STP

2.2.1 Présentation

Dans leur modèle, Dechter *et al.* considèrent comme entités temporels les points temporels. Un point temporel peut représenter le début ou la fin d'un intervalle de temps, un événement de temps si on considère que ce dernier n'a aucune durée, ou bien encore un point de référence temporel absolu tel que «15h de l'après-midi». Les relations métriques qu'ils prennent en considération permettent de contraindre la durée séparant deux points temporels. Une telle relation entre deux points temporels V_i et V_j est exprimée par un ensemble d'intervalles $\{I_{ij}^1, \ldots, I_{ij}^n\}$ correspondant à la contrainte : $V_j - V_i \in I_{ij}^1$ ou ... ou $V_j - V_i \in I_{ij}^n$.

Exemple Soit l'information temporelle : «Chaque matin soit il prend sa voiture pour aller au travail, soit il prend le bus. Dans le premier cas il met entre 15 et 25 minutes, dans le deuxième il met entre 30 et 40 minutes». En notant V_1 et V_2 les deux points temporels correspondant respectivement au départ pour son travail et à son arrivée au travail. V_1 et V_2 sont contraints par l'ensemble d'intervalles : $\{[15, 25], [30, 40]\}$ représentant le fait que $15 \leq V_2 - V_1 \leq 25$ ou $30 \leq V_2 - V_1 \leq 40$.

L'ensemble des contraintes temporelles numériques entre des points est représenté par un CSP particulier : un TCSP. Formellement, nous pouvons définir un TCSP de la manière suivante :

Définition 2.2.1 *Un TCSP est une structure (V, C), où :*

- *V est un ensemble de variables $\{V_1, \ldots, V_m\}$, avec $m > 1$. Chacune de ces variables représente un point temporel. Leur domaine est un ensemble ordonné $\mathcal{E}$, les ensembles les plus couramment utilisés dans les études sont les ensembles des entiers, des rationnels ou bien encore celui des réels. En pratique sont plutôt utilisés les deux premiers de ces ensembles. Nous supposerons dans la suite que $\mathcal{E}$ est un de ces trois ensembles.*
- *C est une application de $V \times V$ vers les sous-ensembles des intervalles(fermés, ouverts et semi-ouverts) de $\mathcal{E}$. $C_{ij} = \{I_{ij}^1, \ldots, I_{ij}^n\}$, avec $n > 1$, représente la contrainte $V_j - V_i \in I_{ij}^1 \cup \ldots \cup I_{ij}^n$. Nous supposerons que deux intervalles quelconque de cette union n'ont pas de valeurs communes et que C_{ji} contient les valeurs opposées de celles de C_{ij}. Quand il n'y a aucune information temporelle entre deux points V_i et V_j alors $C_{ij} = C_{ji} =]-\infty, +-\infty[$. De plus, la contrainte entre une même variable est $[0, 0]$.*

Dans cette définition les contraintes unaires de la forme $V_i \in D_1 \cup \ldots \cup D_n$, avec pour tout $j \in 1, \ldots, n$ $D_j \subseteq \mathcal{E}$, ne sont pas explicitement prises en compte. En fait ces contraintes peuvent s'exprimer à l'aide de contraintes binaires. Pour cela il suffit d'introduire une variable V_0 qui représente l'origine temporelle 0 et d'exprimer une contrainte unaire $\{D_1, \ldots, D_n\}$ sur une variable V_i par la contrainte binaire $C_{0i} = \{D_1, \ldots, D_n\}$.
Pour des raisons de simplicité, Dechter *et al.* dans leur article [DMP91] considèrent que les bornes finies des intervalles des contraintes sont fermées. Mais ils font remarquer que leurs résultats peuvent être étendus aux cas où les bornes sont ouvertes ou semi-ouvertes. Comme nous le verrons dans la suite ceci est loin d'être totalement évident.
Un TCSP (V, C) peut être représenté par un graphe orienté et étiqueté $G = (S, A)$ où, $S = V$

et $(V_i, V_j) \in A$ si C_{ij} est différente de la contrainte $\{]-\infty, +\infty[\}$ (c'est-à-dire dans le cas où il y a réellement une contrainte). L'arc (V_i, V_j) est alors étiqueté par la contrainte C_{ij}. Lorsque nous représenterons un tel graphe, nous omettrons volontairement de représenter l'arc (V_i, V_i) et l'arc (V_i, V_j) lorsque l'arc (V_j, V_i) est déjà indiqué. Dans la suite, un TCSP sera identifié par le graphe orienté le représentant.

Exemple Soient les informations temporelles définies par l'énoncé suivant : « En prenant le bus, Joseph met entre 20 et 30 minutes pour rejoindre son lieu de travail. Tandis qu'en voiture il met entre 5 et 10 minutes. Il part au travail toujours après 7 heures du matin. Sa matinée de travail dure entre 3 et 4 heures. Après quoi il va manger.» En dénotant par V_0, V_1, V_2 et V_3 les points temporels suivants: «7 heures du matin»,«le départ au travail de Joseph», «l'arrivée de Joseph sur son lieu de travail», «le moment où Joseph va manger», nous pouvons représenter ces informations par le TCSP de la figure 2.1. Les valeurs numériques des contraintes de ce TCSP correspondent à des minutes.

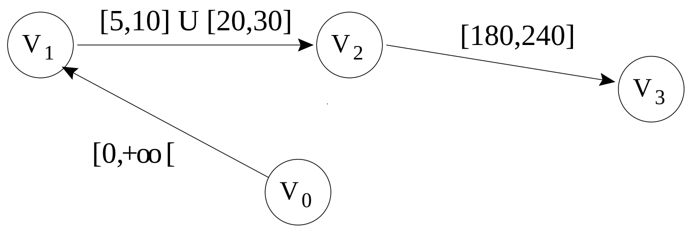


FIG. 2.1: *Un TCSP*

Un STP est un TCSP simplifié :

Définition 2.2.2 *UN STP $\mathcal{S} = (V, C)$ est un TCSP tel que pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, la contrainte C_{ij} est définie par un seul intervalle I_{ij}.*

Dans un STP, la contrainte $C_{ij} = I_{ij}$ entre deux variables V_i et V_j exprime les deux inégalités $V_j - V_i \leq b_{ij}$ et $V_i - V_j \leq -a_{ij}$, avec a_{ij} et b_{ij} qui sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle I_{ij}. Ainsi, les contraintes d'un STP peuvent s'exprimer de manière équivalente à l'aide d'une conjonction d'inégalités.

Du qualitatif vers le quantitatif

Les réseaux de l'algèbre des points restreints aux relations continues de l'ensemble $AP_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire à l'ensemble de relations qualitatives $\{\emptyset, \{<\}, \{<, =\}, \{>\}, \{>, =\}, \{=\}, \{<, =, >\}\}$, peuvent s'exprimer de manière équivalente par un STP. Pour cela, il suffit d'exprimer chaque contrainte qualitative entre deux points temporels par une contrainte quantitative en utilisant la table de traduction 2.1. Ainsi, en prenant par exemple la contrainte qualitative $X\ \{<\}\ Y$ entre deux points X et Y, nous obtenons la contrainte quantitative équivalente : $Y - X \in]0, +\infty[$.

Dans le chapitre consacré à l'algèbre des intervalles nous avons vu que nous pouvons exprimer un réseau d'intervalles convexes à l'aide d'un réseau de points dont les contraintes appartiennent à $AP_{\mathcal{C}}$. Il s'ensuit qu'un réseau d'intervalles convexe peut aussi être exprimé à l'aide d'un STP.

Relation de $AP_{\mathcal{C}}$	Contrainte quantitative
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{<\}$	$]0, +\infty[$
$\{<, =\}$	$[0, +\infty[$
$\{>\}$	$]-\infty, 0[$
$\{>, =\}$	$]-\infty, 0]$
$\{=\}$	$[0, 0]$
$\{<, =, >\}$	$]-\infty, +\infty[$

TAB. 2.1: *Traduction de $AP_{\mathcal{C}}$ en contraintes quantitatives*

La contrainte qualitative $X\ \{<,>\}\ Y$, entre deux points X et Y, ne peut pas se traduire à l'aide d'une contrainte quantitative composée dans un seul intervalle, par contre nous pouvons l'exprimer à l'aide de deux intervalles : $Y - X \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Ainsi, pour exprimer un réseau quelconque de AP nous pouvons utiliser un TCSP. Il en est de même pour les réseaux d'intervalles pointisables.

2.2.2 La méthode de la chemin-consistance et les TCSP

Dans cette section nous allons voir dans quelle mesure la méthode de la chemin-consistance peut être employée pour résoudre un TCSP.

Les opérations fondamentales

Sur l'ensemble des contraintes des TCSP sont définies les opérations union, inverse, composition et intersection de la manière suivante :

Définition 2.2.3 *Soient $R = \{I_1, \ldots, I_l\}$ et $S = \{J_1, \ldots, J_m\}$ deux ensembles d'intervalles représentant deux contraintes d'un TCSP. Dans la suite de cette définition T est un ensemble d'intervalles correspondant à une contrainte d'un TCSP. T est tel qu'il n'existe pas d'ensemble d'intervalles contenant les mêmes valeurs que T avec un nombre d'intervalles inférieur (c'est pour imposer l'unicité de T).*

- *$T = R^{\smile}$ correspond aux valeurs opposées de celles contenues dans R.*
- *$T = R \cup S$ correspond à l'ensemble des valeurs appartenant à R ou S.*
- *$T = R \cap S$ correspond à l'ensemble des valeurs appartenant à la fois à R et S.*
- *$T = R \circ S$ correspond à l'ensemble des valeurs t telle qu'il existe $r \in R$ et $s \in S$, avec $t = r + s$.*

Dans le cas d'un STP, ces opérations se simplifient puisque chaque contrainte est exprimée à l'aide d'un intervalle unique et non plus avec un ensemble d'intervalles comme dans le cas général. Dans ce cas là, le résultat de ces opérations (en excluant l'opération union) n'est plus un ensemble d'intervalles mais un intervalle unique : l'intersection de deux intervalles est l'intervalle contenant les valeurs appartenant aux deux intervalles. L'inverse d'un intervalle est l'intervalle qui a pour borne inférieure (resp. borne supérieure) l'opposé de la borne supérieure (resp. borne inférieure) de cet intervalle. La composition de deux intervalles est l'intervalle qui a pour borne inférieure (resp. borne supérieure) la somme des bornes inférieures (resp. bornes supérieures) des deux premiers intervalles (voir tableau 2.2 pour plus de détails).

borne inf. de I	borne inf. de J	borne inf. de $I \circ J$
$[a$	$[b$	$[a+b$
$]a$	$[b$	$]a+b$
$[a$	$]b$	$]a+b$
$]a$	$]b$	$]a+b$
$]-\infty$	$[b$	$]-\infty$
$]-\infty$	$]b$	$]-\infty$
$[a$	$]-\infty$	$]-\infty$
$]a$	$]-\infty$	$]-\infty$
$]-\infty$	$]-\infty$	$]-\infty$

borne sup. de I	borne sup. de J	borne sup. de $I \circ J$
$a]$	$b]$	$a+b]$
$a[$	$b]$	$a+b[$
$a]$	$b[$	$a+b[$
$a[$	$b[$	$a+b[$
$+\infty[$	$b]$	$+\infty[$
$+\infty[$	$b[$	$+\infty[$
$a]$	$+\infty[$	$+\infty[$
$a[$	$+\infty[$	$+\infty[$
$]+\infty$	$]+\infty$	$]+\infty$

TAB. 2.2: *La composition de deux intervalles I et J.*

Exemple À des fins d'illustration considérons les deux contraintes $R = \{]-\infty, -10[,]1, 2]\}$ et $S = \{[2, 4], [8, 10[\}$. Nous avons $R^{\smile} = \{[-2, -1[,]10, +\infty[\}$, $R \cup S =]-\infty, -10[,]1, 4], [8, 10[\}$, $R \cap S = \{[2, 2]\}$ et $R \circ S = \{]-\infty, 0[,]3, 6],]9, 12[\}$. Nous remarquons que la composition de deux relations composées de plusieurs intervalles peut conduire à des relations avec plus d'intervalles que celui des opérandes. Donnons maintenant un exemple dans le cas où nous avons des contraintes de STP. Soient R et S deux contraintes de STP définies par respectivement $[3, 5[$ et $]0, +\infty[$. Nous avons $R^{\smile} =]-5, -3]$, $R \cup S =]0, +\infty[$, $R \cap S =]0, 3]$ et $R \circ S =]3, +\infty[$.

Les opérations intersection et composition étant définies, nous pouvons appliquer la méthode de la chemin-consistance sur un TCSP et parler de TCSP chemin-consistant de la même façon que pour un réseau d'intervalles. D'une manière générale nous utiliserons pour un TCSP la même terminologie que celle employée dans le cadre des CSP et des réseaux d'intervalles. Nous parlerons donc de TCSP consistants, chemin-consistants, minimaux, *etc.*
Les TCSP n'ont pas toujours des contraintes discrètes puisque sont permis des ensembles d'intervalles réels ou rationnels comme contraintes. Se pose alors le problème de l'arrêt de la méthode de la chemin-consistance lorsqu'elle est appliquée sur un TCSP : est-ce que la méthode de la chemin-consistance s'arrête après un nombre fini d'itérations? Nous verrons que la réponse est positives en ce qui concerne les TCSP dont les contraintes sont définies par des intervalles ayant des bornes finies entières ou rationnelles. Par contre, nous avouons que dans le cas où ces intervalles ont des bornes réelles nous n'avons trouvé ni de réponse affirmative, ni de réponse négative dans la littérature.

Le cas des STP

En nous restreignant aux cas des STP nous n'avons plus ce problème d'arrêt de la méthode de la chemin-consistance même pour le cas des intervalles ou les bornes sont réelles. En effet, nous avons la propriété suivante :

Propriété 2.2.1 *Soient I, J, K trois intervalles. $I \circ (J \cap K) = (I \cap J) \circ (I \cap K)$.*

Ainsi, pour les contraintes formées par un seul intervalle la composition est distributive. Il en résulte que la méthode de la chemin-consistance appliquée à un STP peut être réalisée à l'aide de l'algorithme PC-1 qui n'effectuera qu'une seule itération de sa boucle principale [Mon74]. La méthode de la chemin-consistance effectue donc un nombre fini d'itérations sur un STP. Nous faisons remarquer que pour le cas plus général des contraintes de TCSP la distributivité de la composition sur l'intersection n'est pas toujours satisfaite, Dechter *et al.* [DMP91] donnent un exemple de non distributivité. Ils montrent aussi le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 *Tout STP $\mathcal{S} = (V, C)$ chemin-consistant est minimal et fortement $|V|$-consistant.*

En examinant les preuves que fournissent Dechter *et al.* pour prouver ce résultat, nous remarquons que leur hypothèse qui est de considérer uniquement des intervalles fermés faite lors de leur étude pour des raisons de simplification y joue un rôle très important. Ainsi, il n'est pas évident que ce résultat soit trivialement généralisable au cas où les contraintes peuvent être des intervalles ouverts ou semi-ouverts. Malgré tout, en utilisant une preuve similaire à celle qu'utilise van Beek [Bee90a] pour démontrer cette propriété dans le cadre des réseaux de points dont les contraintes appartiennent à $AP_{\mathcal{C}}$, nous pouvons prouver ce théorème pour le cas général :

Preuve Soit un STP $\mathcal{S}$ ne contenant pas de contraintes vides et chemin-consistant. Nous allons montrer que pour chaque instanciation consistante partielle de $\mathcal{S}$: $m_1, \ldots, m_k$ de k variables de V : $V_1, \ldots, V_k$, peut être étendue à une instanciation consistante partielle de $k+1$ variables et ceci pour $k \in 1, \ldots, |V|-1$. Pour $k = 1$ et 2 la propriété est vraie puisque le STP $\mathcal{S}$ est arc-consistant [1] et chemin-consistant.
Prouvons maintenant la propriété pour $k \in 3, \ldots, |V|-1$. Soit $m_1, \ldots, m_k$ une instanciation consistante partielle des variables $V_1, \ldots, V_k$, étendons cette instanciation à une variable V_{k+1}. Pour $i \in 1, \ldots, k$, l'instanciation m_i de la variable V_i restreint les valeurs possibles pour m_{k+1} à un intervalle de $\mathbb{R}$ donné par $m_{k+1} - m_i \in C_{ik+1}$. $\mathcal{S}$ est chemin-consistant, nous en déduisons donc chaque couple de ces intervalles a une intersection non vide. En effet, chaque instanciation partielle consistante de deux variables peut être étendue à une troisième variable. Il s'ensuit que l'intersection de tous ces intervalles à une intersection non vide. Il suffit d'assigner une des valeurs de cette intersection à m_{k+1} pour obtenir une instanciation partielle consistante des variables $V_1, \ldots, V_{k+1}$. □

Puisque la méthode de la chemin-consistance d'un STP $\mathcal{S} = (V, C)$ peut être réalisée en $O(|V|^3)$, du théorème précédent nous pouvons déduire la propriété suivante :

Propriété 2.2.2 *Le problème de la consistance et de la minimalité d'un STP $\mathcal{S} = (V, C)$ peut être décidé en temps polynomial $O(|V|^3)$ au moyen de la méthode de la chemin-consistance.*

D'autres méthodes polynomiales autre que la chemin-consistance peuvent être utilisées pour résoudre le problème de la consistance d'un STP, Dechter *et al.* utilisent notamment l'algorithme de Floyd-Warshall. Le lecteur peut se reporter à [DMP91] pour plus de détails.

1. Un STP ne contenant pas de contraintes vides est toujours arc-consistant.

Le cas des TCSP

Tout d'abord signalons que le problème de la consistance d'un TCSP est un problème NP-complet dans le cas général. C'est également le cas lorsque nous nous restreignons aux TCSP n'ayant pas des contraintes de plus de deux intervalles. Freuder *et al.* le démontrent en exhibant une réduction polynomiale à partir du problème de 3-coloriage de graphes. Fort de ce constat, nous pouvons affirmer qu'il n'existe pas de méthodes polynomiales pouvant résoudre le problème de la consistance d'un TCSP (avec l'hypothèse que P≠NP).
Étant donné un TCSP, en ne gardant qu'un intervalle de chacune de ses contraintes nous définissons ce que nous appelons un de ses STP. Le réseau minimal d'un TCSP est le TCSP qui correspond à l'union [2] des STP minimaux de ses STP. Ainsi pour calculer le réseau minimal d'un TCSP il suffit de générer ses STP et de calculer leurs STP minimaux, ceci peut être fait en $O(e^k n^3)$, avec e le nombre d'arcs appartenant au graphe du TCSP et k le nombre maximal d'intervalles définissant une contrainte.
Soit une contrainte de TCSP définie par un ensemble d'intervalles $\{I_1, \ldots, I_n\}$ tel que chacune des bornes des intervalles est finie et entière. Dechter *et al.* définissent l'éventail («the range») d'une telle contrainte par la différence entre la plus grande borne de ses intervalles et la plus petite borne de ses intervalles, c'est-à-dire par $I_n^+ - I_1^-$ avec I_1^- la borne inférieure de I_1 et I_n^+ la borne supérieure de I_n. L'éventail d'un TCSP est le plus grand éventail de ses contraintes.

Exemple L'éventail de la contrainte $\{]-1, 10], [40, 100], [300, 500[\}$ est de 501.

Lorsque nous appliquons la méthode de la chemin-consistance sur un TCSP ayant pour contraintes des ensembles d'intervalles dont les bornes sont finies et entières, nous pouvons affirmer qu'elle s'arête après un nombre fini d'opérations de triangulation. En effet,pour ce type de TCSP, Dechter et al. [DMP91] montrent le résultat suivant :

Propriété 2.2.3 *Étant donné un TCSP $\mathcal{T} = (V, C)$. La méthode de la chemin consistance sur $\mathcal{T}$ peut être obtenue (grâce à l'algorithme PC-2) à l'aide de $O(|V|^3 R)$ opérations de triangulations, où K est l'éventail («the range») de $\mathcal{T}$.*

La preuve de cette propriété est similaire à celle utilisée dans le cas où les contraintes sont discrètes. Elle est basée sur le fait qu'une opération de triangulation modifiant une contrainte va au moins enlever un ensemble de valeurs correspondant à un intervalle de longueur un. Il s'ensuit qu'au plus R opérations de triangulations peuvent modifier une même contrainte. Ce résultat peut être généralisé au cas où les bornes des intervalles sont rationnelles. En effet, il suffit de multiplier chaque borne par leurs plus petit dénominateur commun pour obtenir un TCSP dont les bornes des intervalles des contraintes sont entières. L'algorithme PC-2 opère sur ce TCSP autant d'opérations de triangulation que sur le TCSP initial. Il en effectue donc sur ce dernier un nombre fini.
Pour le cas où les bornes sont réelles, nous n'avons pas trouvé de preuve ou de contre-exemple de la terminaison en temps fini de la méthode de la chemin-consistance. Un autre cas non couvert par la propriété précédente est le cas où les bornes sont infinies. Ces deux cas semblent être évités dans les applications.

2. L'union de deux réseaux de contraintes (V, C) et (V, C') est le réseau de contrainte (V, C'') avec pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, $C''_{ij} = C_{ij} \cup C'_{ij}$.

L'application de la méthode de la chemin-consistance sur un TCSP fait surgir d'autres problèmes que celui de son arrêt. En effet, lorsque l'éventail d'un TCSP (dont les intervalles des contraintes ont des bornes entières ou rationnelles) est élevé, la méthode de la chemin-consistance peut réaliser un nombre considérable d'opérations de triangulation avant d'atteindre un point fixe. Son exécution peut alors être longue et problématique en pratique. Un autre problème pouvant survenir est celui de la fragmentation des contraintes. En effet, Schwalb [Sch98] fait remarquer que lorsque nous effectuons une opération de triangulation les contraintes peuvent se diviser en sous-intervalles à cause de l'opération de composition. Ainsi, le nombre d'intervalles des contraintes peut devenir exponentiel. Pour apporter une solution partielle à ces problème il introduit des algorithmes approximant la méthode de la chemin-consistance. Le lecteur peut se reporter à [Sch98] pour plus de détails.

L'application de la méthode de la chemin-consistance semble donc difficile à mettre en œuvre pour les TCSP dans le cas général. De plus, cette méthode n'est pas complète puisqu'il existe des TCSP chemin-consistant ne contenant pas la contrainte vide et qui sont pourtant inconsistants [DMP91].

2.2.3 Les STP$^{\neq}$

Présentation

Gerevini et Cristani introduisent dans [GC97] une extension des STP : les STP$^{\neq}$. Un STP$^{\neq}$ est un STP augmenté de contraintes de la forme $Y - X \neq v$, où v est une valeur numériqueet X, Y sont deux variables temporelles. Une remarque très importante est qu'un STP$^{\neq}$ étend un STP dont les contraintes sont des intervalles d'un ensemble dense comme l'ensemble des réels ou des rationnels par exemple. Dans la suite, lorsque nous parlerons de STP, implicitement leurs contraintes seront de tels intervalles. Formellement, un STP$^{\neq}$ est défini de la manière suivante :

Définition 2.2.4 *Un STP$^{\neq}$ $\mathcal{S}$ est une structure (V, C) où :*

- *V est un ensemble de variables $V_1, \ldots, V_n$ (avec $n = |V|$) représentant des points temporels.*
- *C est une application qui associe à chaque couple de variables V_i et V_j de V une contrainte C_{ij} définie par un couple (I_{ij}, E_{ij}) où I_{ij} est un intervalle et E_{ij} est un ensemble fini de valeurs de I_{ij}. C_{ij} correspond à la contrainte $V_j - V_i \in I_{ij} \setminus E_{ij}$. I_{ij} est un intervalle qui peut être ouvert, fermé, semi-fermé et avoir des bornes finies ou infinies. E_{ij} est appelé l'ensemble des points exclus de I_{ij}.*

Nous supposerons que pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, $I_{ij} = I_{ji}{}^{\smile}$ et E_{ij} contient les valeurs opposées de celles de E_{ji}.
Un réseau de l'algèbre des points peut s'exprimer à l'aide d'un STP$^{\neq}$. En effet, les relations qualitatives de $AP_{\mathcal{C}}$ s'expriment à l'aide d'un intervall (voir tableau 2.1), tandis que la relation $\{<, >\}$ se traduira par la contrainte quantitative exprimée à l'aide de l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble de points exclus $\{0\}$. Gerevini *et al.* définissent le réseau relaxé d'un STP$^{\neq}$ de la façon suivante :

Définition 2.2.5 *Soit $\mathcal{S} = (V, C)$ un STP$^{\neq}$. Le réseau relaxé de $\mathcal{S}$ est le STP $\mathcal{S}' = (V, C')$ défini par : pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, $C'_{ij} = I_{ij}$, avec $C_{ij} = (I_{ij}, E_{ij})$.*

Le réseau relaxé d'un STP$^{\neq}$ est moins contraignant que ce dernier puisqu'il autorise les valeurs se trouvant dans les ensembles de points exclus. La consistance d'un STP$^{\neq}$ peut être déterminée à l'aide de son réseau relaxé, en effet nous avons la propriété suivante [GC97]:

Théorème 2.2.2 *Soit $\mathcal{S} = (V, C)$ un STP$^{\neq}$ et soit $\mathcal{S}' = (V, C')$ son réseau relaxé. $\mathcal{S}$ est consistant si, et seulement si, $\mathcal{S}'$ est consistant et pour tout $i, j \in 1, \ldots, |V|$, et pour toute valeur $v \in E_{ij}$, il existe une instanciation consistante m de $\mathcal{S}'$ tel que $m_j - m_i \neq v$.*

La méthode de la chemin-consistance résout le problème de la minimalité d'un STP. Pour tester la consistance d'un STP$^{\neq}$ il suffit donc d'appliquer la méthode de la chemin-consistance sur son réseau relaxé, puis de vérifier que chaque valeur v de l'ensemble des points exclus entre V_i et V_j ne se trouve pas dans la contrainte $[v, v]$ entre V_i et V_j dans le STP obtenu. Si c'est le cas, le STP$^{\neq}$ est consistant sinon il est inconsistant. Cette méthode peut être implantée par l'algorithme CONSISTANCE-STP$^{\neq}$ de la figure 2.2 en $O(|V|^3 + k)$, avec k le nombre de valeurs exclues dans le STP$^{\neq}$ et V l'ensemble de ses variables. Nous signalons que Gerevini *et al.* fournissent un algorithme de même complexité, appelé STP$^{\neq}$-SOLUTION, qui permet d'obtenir une instanciation consistante d'un STP$^{\neq}$, si elle existe bien sûr.

Algorithme CONSISTANCE-STP$^{\neq}$
Entrée : un STP$^{\neq}$ $\mathcal{S} = (V, C)$, avec $|V|$.
début
    $\mathcal{S}' \leftarrow$ réseau relaxé de $\mathcal{S}$
    $\mathcal{S}' =$ PC-1($\mathcal{S}'$)
    pour $i, j \leftarrow 1$ **à** $|V|$ **faire**
        pour toutes les valeurs $v \in E_{ij}$ **faire**
            si $C_{ij} = [v, v]$ **alors retourner** Inconsistant
    retourner Consistant
fin

FIG. 2.2: *L'algorithme CONSISTANCE-STP$^{\neq}$*

Le problème de la consistance des STP$^{\neq}$ est donc comme celui des STP : un problème traitable. Nous aurions pu déduire ce résultat des travaux de Koubarakis. Ce dernier s'intéresse dans [Kou92] aux contraintes temporelles de la forme :

- $V_1 - V_2 \leq v$, où V_1 ou V_2 peut être omis (une inégalité),
- $V_1 - V_1' \neq v_1 \vee \ldots \vee V_n - V_n' \neq v_n$ (une disjonction d'inéquations).

Avec $V_1, \ldots, V_n, V_1', \ldots, V_n'$ qui sont des variables sur un ensemble dense, non borné et linéaire et $v_1, \ldots, v_n$ sont des constantes rationnelles.
Un STP$^{\neq}$ peut être défini de manière équivalente par un ensemble de telles contraintes (pourvu que les bornes de ses contraintes soient des rationnels). Koubarakis exhibe un algorithme polynomial qui détermine la consistance ou l'inconsistance d'un ensemble de telles contraintes temporelles. Cet algorithme est en $O(u^4)$ avec u le nombre de clauses unitaires composant l'ensemble des contraintes temporelles, c'est-à-dire le nombre d'inégalités plus le nombre d'inéquations des disjonctions d'inéquations. En examinant l'algorithme que Koubarakis propose nous remarquons que lorsque les contraintes temporelles correspondent à un STP$^{\neq}$ $\mathcal{S} = (V, C)$

alors sa complexité est plus faible et est en $O(|V|^3 + k|V|^2)$ avec k le nombre de valeurs dans les ensembles de points exclus de $\mathcal{S}$.
Poursuivant son étude Koubarakis a considéré des contraintes encore plus générales: les contraintes de Horn [Kou96].

Définition 2.2.6 *Une contrainte de Horn est une disjonction $d_1 \vee \ldots \vee d_n$, où pour tout $i \in 1, \ldots, n$, d_i est soit une inégalité de la forme $c_1V_1 + \ldots c_mV_m \leq V_{m+1}$, soit une inéquation de la forme $c_1V_1 + \ldots c_mV_m \neq V_{m+1}$. Avec comme contrainte qu'il ne peut pas y avoir plus d'une inégalité. $V_1, \ldots, V_{m+1}$ sont des variables réelles et $c_1, \ldots, c_n$ des constantes entières. Une contrainte de Horn est négative si elle ne possède pas d'inégalité sinon elle est positive.*

Exemple À des fins d'illustration voici deux contraintes de Horn : $-2V_1 + 3V_5 \leq V_2 \vee V_3 \neq V_4 \vee 3V_2 + 2V_1 \neq V_4$ et $V_1 + 2V_2 - 3V_5 \neq V_4 \vee V_3 \neq V_4 \vee V_3 - 5V_4 \neq v_1$. La première contrainte est une contrainte de Horn positive contrairement à la seconde qui est négative.

Nous remarquons que les clauses ORD-Horn définies par Nebel pour caractériser les relations ORD-Horn de l'algèbre des intervalles sont des contraintes de Horn de Koubarakis. Koubarakis [Kou96] exhibe un algorithme polynomial qui permet de détecter la consistance ou l'inconsistance d'un ensemble de contraintes de Horn. Il ne donne pas de complexité précise de cet algorithme mais il est sûr qu'il est très difficile à mettre en œuvre du fait qu'il est basé en partie sur l'algorithme de Kachian (algorithme utilisé pour la programmation linéaire).
Pour clore cette section, signalons que des résultats similaires à ceux de Koubarakis ont été trouvés par par Jonsson et Bäckström [JB96].

2.3 Des contraintes temporelles qualitatives et quantitatives

De nombreux chercheurs ont voulu profiter à la fois de l'expressivité des contraintes qualitatives et de celle des contraintes métriques. Ils ont alors défini des modèles où coexistent ces deux types de contraintes. Dans cette section nous allons en présenter quelques uns.

2.3.1 Le modèle de Meiri

Le modèle temporel de Meiri [Mei91, Mei96] est l'un des plus complets. En effet, ce dernier définit des CSP temporels dont les variables représentent des intervalles et des points et dont chaque contrainte peut être une contrainte qualitative ou une contrainte quantitative.
Les contraintes qualitatives qu'il considère sont de quatre sortes : des contraintes entre deux intervalles, des contraintes entre deux points, des contraintes entre un point et un intervalle et celles entre un intervalle et un point. Les 2 premières sont exprimées par respectivement les relations de l'algèbre des intervalles d'Allen et les relations de l'algèbre des points de Vilain et Kautz que nous avons étudiées lors du précédent chapitre. Les deux derniers types de contraintes sont définies par respectivement des relations de PI et IP. Les relations de PI (resp. IP) est l'ensemble des disjonctions des relations atomiques qualitatives correspondant à toutes les positions relatives possibes entre un point et un intervalle (resp. un intervalle et un point) de la droite. Ces relations atomiques sont représentées dans la figure 2.3. Elles sont notées avec un prime pour éviter toute confusion avec celles de AI.

Exemple Soient un événement temporel représenté par un point X et un intervalle de temps

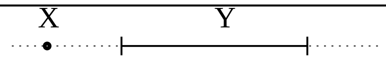
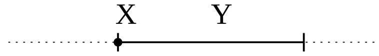
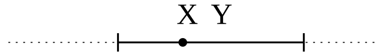
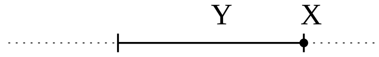
Relation PI (symbole)	Relation IP	Contraintes sur les points	Représentation
$X\ before'\ Y\ (b')$	$Y\ bi'\ X$	$X < Y^- < Y^+$	
$X\ starts'\ Y\ (s')$	$Y\ si'\ X$	$X = Y^-$ et $Y^- < Y^+$	
$X\ during'\ Y\ (d')$	$Y\ di'\ X$	$Y^- < X < Y^+$	
$X\ finishes'\ Y\ (f')$	$Y\ fi'\ X$	$X = Y^+$ et $Y^- < Y^+$	
$X\ after'\ Y\ (a')$	$Y\ bi'\ X$	$Y^- < Y^+ < X$	

FIG. 2.3: *Les relations atomiques de PI et IP.*

représenté par un intervalle Y. L'information temporelle : «X a lieu soit en tout début de Y soit strictement après Y», sera représentée par la contrainte $X\ \{starts', after'\}\ Y$.

Les contraintes quantitatives considérées par Meiri concernent uniquement les points. Elles sont définies de la même manière que pour les TCSP que nous avons vu précédemment et contraignent la position absolue d'un point ou bien la distance entre deux points. Elles sont donc de deux formes :

- $V_i \in D_i = \{I_1, \ldots, I_n\}$ (contraintes unaires) ,
- $V_j - V_i \in \{I_1, \ldots, I_n\}$ (contraintes binaires).

Avec V_i, V_j deux variables représentant deux points temporels et $I_1, \ldots, I_n$ des intervalles. Dans la section sur les TCSP nous avons fait remarquer que les contraintes unaires peuvent être représentées par des contraintes binaires en prenant un point de référence V_0.
Grâce à ces différents types de contraintes, Meiri définit un réseau de contraintes temporelles générales (nous noterons dans la suite RCTG en abrégé) de la manière suivante :

Définition 2.3.1 *Un RCTG est une structure (V, C) où :*

- *V est un ensemble de variables $V_1, \ldots, V_n$, chacune d'elles représente un point ou un intervalle de la droite des réels.*
- *C est un ensemble de contraintes binaires sur $V \times V$. C_{ij} peut être quantitative ou qualitative avec les formes vues précédemment. De plus, pour chaque variable $V_i \in V$ représentant un intervalle, il existe deux variables V_j et V_k représentant des points correspondant respectivement à la borne inférieure et la borne supérieure de V_i. Avec les contraintes C_{ji} et C_{ki} qui sont $\{starts'\}$ et $\{finishes'\}$.*

Un RCTG est une structure très riche qui subsume celles des réseaux d'intervalles, des réseaux de points et des TCSP. Comme nous nous en doutons, du fait de ce grand pouvoir d'expressivité, le problème de la consistance d'un RCTG est dans le cas général un problème NP-complet. Pour déterminer la consistance d'un RCTG, Meiri teste la consistance des sous-réseaux de ce RCTG ayant pour contraintes uniquement des singletons (c'est à dire une seule relation atomique par contrainte qualitative et un seul intervalle par contrainte quantitative).

La consistance de ces sous-réseaux est facile à déterminer puisque chacun d'eux peut être traduit en un STP. Cette méthode a une complexité exponentielle par rapport au nombre de variables. Pour améliorer cette méthode, Meiri préconise d'appliquer la méthode de la chemin-consistance sur le RCTG pour éliminer des valeurs des contraintes ne pouvant pas conduire à des instanciations consistantes. Pour mettre en œuvre la méthode de la chemin-consistance, il définit tout d'abord l'opération de composition $\otimes$ sur l'ensemble des contraintes d'un RCTG. La composition entre deux contraintes qualitatives est déterminée à l'aide de tables de compositions entre les différentes relations atomiques qualitatives. Outre la table de composition d'Allen qui détermine la composition de deux relations atomiques de AI et celle dans laquelle est donnée la composition de deux relations atomiques de AP, il y a des tables qui définissent la composition de deux contraintes qualitatives de genres différents telle que celle qui donne la composition entre une relation atomique de AP et une relation atomique de PI. La composition de deux relations quantitatives est celle définie sur les contraintes d'un TCSP vue précédemment. Il reste à définir la composition entre une contrainte qualitative et une de type quantitatif. Pour cela Meiri utilise deux opérations : $QUAN$ et $QUAL$. $QUAN$ retourne la plus petite contrainte quantitative impliquée par une contrainte qualitative entre deux points. $QUAL$ est l'opération opposée, elle détermine la plus petite contrainte qualitative impliquée par une contrainte quantitative entre deux points.
Formellement l'opération $QUAL$ est définie de la manière suivante. Soit $C_{ij} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ un ensemble d'intervalles représentant une contrainte quantitative entre deux points P_i et P_j, $QUAL(C_{ij})$ est la relation R de PA définie par :

- si $0 \in C_{ij}$ alors la relation atomique «=» $\in R$;
- si $v \in C_{ij}$, avec $v < 0$ alors la relation atomique «>» $\in R$;
- si $v \in C_{ij}$, avec $v > 0$ alors la relation atomique «<» $\in R$.

L'opération $QUAN$ correspond à la traduction des relations de l'algèbre des points en contraintes métriques des TCSP vue dans la section précédente.
À partir de ces opérations Meiri définit la composition entre une relation R quantitative et une relation S qualitative, elle dépend du type de la relation S :

- Si S est une relation de PI alors $R \otimes S$ est la relation quantitative : $R \otimes QUAN(S)$.
- Si S est une relation de AP alors $R \otimes S$ est la relation qualitative de AP : $QUAL(R) \otimes S$.

Il définit aussi l'opération d'intersection entre une relation quantitative R et une relation qualitative S par la relation quantitative $R \cup QUAN(S)$.
Les opérations d'intersection et de composition ainsi définies permettent d'effectuer une opération de triangulation entre tout type de contraintes. Elles rendent ainsi possible la réalisation de la méthode de la chemin-consistance sur un RCTG malgré le fait que celui-ci possède des contraintes hétérogènes.

Exemple À des fins d'illustration nous allons donner un exemple d'opération de triangulation sur des contraintes de différents types. Supposons que nous ayons trois variables V_1, V_2, V_3 représentant des points et les contraintes suivantes : $C_{12} = \{[0, 3],]6, 50[\}$, $C_{23} = \{<\}$ et $C_{13} = \{<, =, >\}$. L'opération de triangulation $C_{13} \leftarrow C_{13} \cap (C_{12} \otimes C_{23})$ s'effectue de la manière suivante :

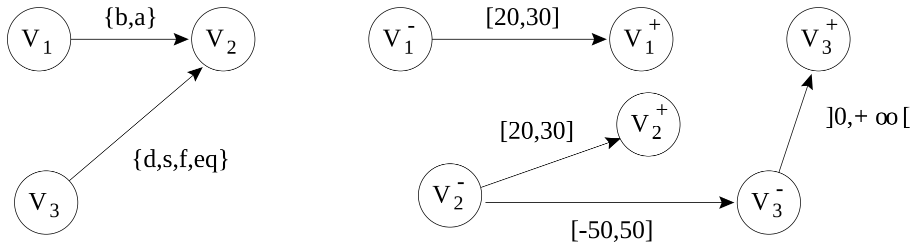


FIG. 2.4: *Un réseau des intervalle $\mathcal{N}$ à gauche et un STP $\mathcal{N}$ à droite.*

$C_{12} \otimes C_{23} = C_{12} \otimes QUAN(C_{23})$ =$\{[0,3],]6,50[\}\otimes$ $\{]0,+\infty[$=$\{]0,3],]6,50[\}$.
$C_{13}\cap\{]0,3],]6,50[\} = QUAN(C_{13})\cap\{]0,3],]6,50[\}$ =$\{]-\infty,+\infty[\}\cap\{]0,3],]6,50[\}$ =$\{]0,3],]6,50[\}$.
Et enfin C_{13} prend pour valeur la relation $QUAL(\{]0,3],]6,50[\})$, c'est-à-dire $\{<\}$.
La méthode de la chemin-consistance n'est pas complète dans le cas général. Signalons tout de même que Meiri a exhibé des cas traitables parmi les RCTG ayant pour contraintes entre deux intervalles que des relations pointisables. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Mei96].
Il est temps de présenter le modèle temporel de Ladkin et Kautz.

2.3.2 Le modèle de Kautz et Ladkin

Kautz et Ladkin [KL91] ont une approche différente de Meiri. Au lieu de représenter dans un même réseau des contraintes temporelles d'ordre qualitatif et des contraintes d'ordre quantitatif, ils les séparent dans deux réseaux de contraintes distincts. Leur système peut être défini par deux composantes :

– Un réseau d'intervalles $\mathcal{N} = (V, C)$. Ce réseau contient les contraintes qualitatives sur les positions relatives entre un ensemble d'intervalles représenté par les variables de V.

– Un STP $\mathcal{S} = (V', C')$ dont les contraintes sont des intervalles rationnels. Les variables de $\mathcal{S}$ représentent les bornes des intervalles correspondant à V. C'est-à-dire que pour chaque variable $V_i \in V$, il existe deux variables V_i^- et V_i^+ appartenant à V' représentant respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de V_i. La contrainte $C'(V_i^-, V_i^+)$ est toujours incluse dans l'intervalle $]0,+\infty[$. Ceci exprimant le fait que la borne supérieure d'un intervalle est toujours supérieure à la borne inférieure du même intervalle. $\mathcal{S}$ détermine les contraintes métriques sur les durées entre les différents points représentant les bornes des intervalles.

Nous notons que dans cette structure il n'y a plus, comme dans le modèle de Meiri, des contraintes explicites entre des points et des intervalles. Celles-ci sont données par le lien implicite qu'il y a entre une variable représentant un intervalle et les deux variables représentant les bornes de cet intervalle.

Exemple Soient 3 processus machines P_1, P_2, P_3. Et soient les contraintes temporelles entre ces processus définies par : «P_1 se déroule soit strictement avant, soit strictement après P_2. P_3 se déroule pendant $P2$. P_1 et P_3 durent entre 20 et 30 minutes. La différence entre les moments où débutent P_1 et P_2 n'excède pas 50 minutes.» Ces informations temporelles peuvent être représentées par le réseau d'intervalles $\mathcal{N}$ et le STP $\mathcal{S}$ de la figure 2.4.

Pour déterminer la consistance des contraintes exprimées par le couple $(\mathcal{N}, \mathcal{S})$. Kautz et Ladkin proposent un algorithme qui peut se résumer ainsi :

1. Calculer séparément le réseau minimal de $\mathcal{N}$, noté $\mathcal{N}'$ et le réseau minimal de $\mathcal{S}$, noté $\mathcal{S}'$.

2. Combiner les contraintes de $\mathcal{N}'$ et de $\mathcal{S}'$: supprimer les relations atomiques des contraintes de $\mathcal{N}$ non possibles à cause de $\mathcal{S}'$. Et vice versa, supprimer les valeurs numériques des contraintes de $\mathcal{S}'$ non permises par les contraintes qualitatives de $\mathcal{N}'$.

3. Si les réseaux d'intervalles $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont identiques, ainsi que les deux STP $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, alors s'arrêter sinon aller à l'étape suivante.

4. Remplacer les contraintes de $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{S}$) par celles de $\mathcal{N}'$ (resp. $\mathcal{S}'$). Retourner à l'étape 1.

Le principal problème sur lequel se sont heurtés Ladkin et Kautz se situe au niveau de la combinaison des contraintes qualitatives et quantitatives (étape 2.). En effet, dans le cas général, une relation d'Allen ne peut pas s'exprimer de manière équivalente par des contraintes métriques n'utilisant que celle permises par un STP et réciproquement. Ils ont donc définies deux traductions qui permettent d'exprimer approximativement (mais de façon optimale) une contrainte qualitative à l'aide de contraintes quantitatives et des contraintes quantitatives à l'aide de contraintes qualitatives. La conséquence de cette «approximation» est que la méthode proposée est saine mais incomplète dans le cas général. C'est à dire que si les réseaux $\mathcal{N}$ et $\mathcal{S}$ obtenus sont des réseaux contenant la contrainte vide alors les contraintes initiales sont inconsistantes. Par contre, dans le cas contraire nous ne sommes pas certains de leur consistance. Dans la suite de ce rapport nous montrerons que cette méthode est en fait complète lorsque les réseaux d'intervalles considérés sont préconvexes. La complexité de cette méthode est de $O(n^2(n^3 + CN))$ avec n le nombre de variables de $\mathcal{N}$ et CN la complexité en temps pour déterminer le réseau minimal de $\mathcal{N}$. Si $\mathcal{N}$ est un réseau convexe alors cette complexité sera en $O(n^3)$ et ainsi la méthode sera de $O(n^5)$. Pour des réseaux d'intervalles préconvexes, le réseau minimal peut être calculé en $O(n^5)$, ainsi nous aurons une complexité de $O(n^7)$.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rapidement survolé différents formalismes temporels utilisant des contraintes métriques. Les TCSP utilisent des contraintes métriques qui permettent de contraindre la durée entre deux points temporels. Chaque contrainte binaire entre deux points V_i et V_j est exprimée à l'aide d'un ensemble d'intervalles contenant les valeurs possibles de la différence $V_j - V_i$. Le problème de la consistance de ces CSP temporels est non polynomial dans le cas général. Par contre en nous restreignant à un sous-ensemble de TCSP appelés STP, ce problème devient polynomial et peut être décidé au moyen de la méthode de la chemin-consistance. Un STP est moins expressif qu'un TCSP du fait que chacune de ses contraintes n'est définie que par un seul intervalle.
Nous avons ensuite présenté des modèles qui allient à la fois des contraintes qualitatives et des contraintes quantitatives. Le plus complet est celui de Meiri. Dans ce modèle sont considérées

à la fois des contraintes qualitatives entre des points et des intervalles, exprimées par des relation de AI, AP, IP et PI et des contraintes quantitatives entre les points définies de la même façon que dans un TCSP. Toutes ces contraintes sont représentées dans un même CSP temporel. Ceci est peut être le principal reproche que l'on puisse faire au formalisme de Meiri. En effet, en mélangeant à la fois des variables représentant des points et des intervalles et des contraintes numériques et qualitatives, nous obtenons uns structure très lourde et hétérogène difficile à manipuler.

Kautz et Ladkin sont plus modestes et proposent un modèle basé sur deux composantes : un réseau d'intervalles et un STP, avec les variables du STP qui représentent les bornes des variables du réseau d'intervalles. Cette démarche nous semble plus claire. En effet nous avons d'un côté des contraintes qualitatives sur des intervalles et de l'autre des contraintes métriques sur des points. Cette démarche ne mélange pas les genres. De plus, comme nous l'avons vu, rien n'empêche de faire interagir ces deux composantes en utilisant des opérations de traduction.

Le problème de la consistance dans ces deux modèles est non polynomial dans le cas général. Il existe tout de même dans ces deux structures «des îlots de traitabilité».