Réseaux d’interconnexion statiques

Tanguy Risset
Patrice Quinton

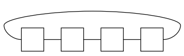
Introduction

Les réseaux d’interconnexion statique sont utilisés généralement pour les machines communiquant par messages (mémoire distribuée).

Types de réseaux (1)

•Réseaux complets : chaque processeur est connecté à tous les autres

•Réseaux en étoile : chaque processeur est connecté au même processeur central

•Réseaux en anneau : 

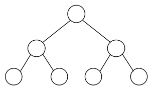
Types de réseaux (2)

• Grilles à *n* dimensions (n-D):
  - généralisation du réseau linéaire
  - routage simple
  - 1 processeurs relié à 2*n* autres

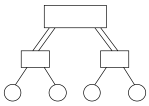
    ex: DAP, paragon, Cray T3D

Types de réseaux (3)

- Réseaux en arbre:
  - les réseaux en étoile et linéaires en sont des cas particuliers
  - on peut aussi imaginer cette topologie en dynamique



ou



Types de réseaux (4)

- Réseaux en Hypercube:
  - architecture ayant eu le plus de succès pour les machines parallèles
  - simplicité (routage, gestion de communication)
  - complétude (on peut émuler les grilles, arbres, etc.)

Hypercube (1)

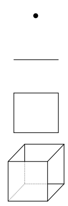
Définition : Un hypercube de dimension *r* est un cube en dimension *r*

dimension 0

dimension 1

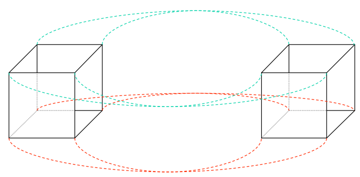
dimension 2

dimension 3



Hypercube (2)

- Chaque nœud a exactement r voisins
- On peut construire un hypercube de dimension *r* à l'aide de deux hypercubes de dimension *r*-1

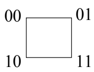


Hypercube (3)

• Numérotation des sommets → code de Gray

• En dimension r : 2^r sommets ⇒ numéros sur r bits

• Exemple en dimension 2:



Hypercube (4)

• Propriété de la numérotation de Gray: 2 voisins diffèrent uniquement par un bit

• Une arête est de dimension k si c'est le $k^{ème}$ bit qui diffère entre les sommets

Hypercube (5)

• Si U représente un sommet, U^k représente son voisin en dimension k

• $U^{\{k1,\ldots,ks\}}$ est U dans lequel les bits $k_1,\ldots,k_s$ ont été complementés

Hypercube (6)

• Diamètre : $\log N = \log(2^r) = r$
• Les arêtes de dimension k forment un couplage parfait (couplage parfait = ensemble d'arêtes qui touchent tous les nœuds et qui ne partagent aucun nœud)
• Largeur de bissection : $\frac{N}{2}$ (arêtes dans une dimension)

Hypercube et automorphisme (1)

Un hypercube contient des symétries:
Pour toute paire d'arcs ((u,v) , (u',v')) avec (u,v) de dimension *k* et (u',v') de dimension *k*',
$\exists\,\Phi$ un automorphisme de H t.q

$$\begin{cases}\Phi(u) = u' \\ \Phi(v) = v'\end{cases}$$

C'est une bijection de H→H sur les nœuds et les arcs

Hypercube et automorphisme (2)

Par exemple, pour toute permutation Π de {1,..,logN} t.q Π(k)=*k'*, la transformation

$$\Phi(x_1..x_{\log N}) = (x_{\Pi(1)} \oplus u_{\Pi(1)} \oplus u_1') \,|\, (x_{\Pi(2)} \oplus u_{\Pi(2)} \oplus u_2') \,|$$
$$\ldots \,|\, (x_{\Pi(\log N)} \oplus u_{\Pi(\log N)} \oplus u_{\log N}')$$

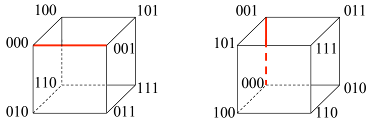
$\oplus$ = ou exclusif
| = concaténation

est un automorphisme ayant cette propriété

Hypercube et automorphisme (3)

Exemple:

k=3 *k'*=2
(000,001) → (110,100)



Hypercube et automorphisme (4)

Π{1,2,3}={1,3,2}

$$x_{\Pi(1)} \oplus u_{\Pi(1)} \oplus u_1' = x_1 \oplus u_1 \oplus u_1' = x_1 \oplus 1$$
$$x_{\Pi(2)} \oplus u_{\Pi(2)} \oplus u_2' = x_3 \oplus u_3 \oplus u_2' = x_3 \oplus 1$$
$$x_{\Pi(3)} \oplus u_{\Pi(3)} \oplus u_3' = x_2 \oplus u_2 \oplus u_3' = x_2$$

000 → 110 et 001 → 100

Hypercube et automorphisme (5)

- G,H deux graphes non orientés
- Un plongement de G dans H est défini par deux fonctions: *f* associant à chaque sommet de G un sommet de H, et P_f associant une arête de G à une arête de H.
- Si *f* est injective ⇒ plongement, sinon ⇒ placement

Hypercube et automorphisme (6)

- dilatation d'un plongement f:G →H, notée dil(f) = $\max_{[x,y]}\left(P_f[x,y]\right)$
- expansion = $\dfrac{\#sommets(H)}{\#sommets(G)}$
- congestion = $\max_{e\in H}\left(\#\{[x,y]/e\in P_f[x,y]\}\right)$
- congestion-sommet = $\max_{x\in H}\left(\#\{[x',y']/x\in P_f([x',y'])\}\right)$

Lemme 1

- Lemme 1: L'hypercube à N noeuds contient un réseau linéaire (ou un anneau) de N cellules comme sous-graphe dès que N≥4
- Remarque: On dit alors que l'hypercube est hamiltonien

Preuve du lemme 1 (1)

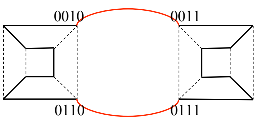
Preuve du lemme 1:
N=4 : évident
N>4 : On découpe l'hypercube de N nœuds en deux sous-hypercubes de N/2 nœuds, chacun possédant un cycle hamiltonien (par récurrence)
On peut supposer que ces deux circuits comportent les arcs:

$$(\underbrace{0\ldots0}_{\log N-1}10,\ \underbrace{0\ldots0}_{\log N-1}110)\ \text{et}\ (\underbrace{0\ldots0}_{\log N-1}11,\ \underbrace{0\ldots0}_{\log N-1}111)$$

Preuve du lemme 1 (2)

On construit le nouveau circuit de l'hypercube de dimension N en coupant ces deux arcs et en ajoutant les arcs

$$(\underbrace{0\ldots0010}_{\log N}, \underbrace{0\ldots0110}_{\log N}) \quad \text{et} \quad (\underbrace{0\ldots0011}_{\log N}, \underbrace{0\ldots0111}_{\log N})$$

Exemple: 

Produit cartésien

Définition: Soient k graphes $G_1, G_2, \ldots, G_k$ avec $G_j=(V_j,E_j)$. On défini ainsi le produit cartésien $G = G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k$:

G =(V,E)

avec $V = \{(v_1, v_2, \ldots, v_k) / v_i \in V_i\}$

et $E = \{\{(u_1, u_2, \ldots, u_k), (v_1, v_2, \ldots, v_k)\} / \exists j : (u_j, v_j) \in E_j \wedge \forall i \neq j : u_i = v_i\}$

$\otimes$ est associatif

Lemme 2

Lemme 2: Si on note H_r l'hypercube de dimension *r*: $\forall k \geq 1 \quad r = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$, on a $H_r = H_{r1} \otimes H_{r2} \otimes \ldots \otimes H_{rk}$

Preuve: H_r est simplement une grille $\overbrace{2\times2\times\ldots\times2}^{r \text{ fois}}$ donc $H_r = \underbrace{H_1 \otimes H_1 \otimes \ldots \otimes H_1}_{r \text{ fois}}$, et il suffit de factoriser

Lemme 3

Lemme 3: Si $G = G_1 \otimes G_2 \otimes \ldots \otimes G_k$ et $G' = G'_1 \otimes G'_2 \otimes \ldots \otimes G'_k$ et si $\forall i$: G_i est un sous graphe de G'_i , alors G est un sous graphe de G'.

Preuve du lemme 3

Preuve du lemme 3:

$\forall$i on a un plongement $f_i : V_i \rightarrow V'_i$ qui préserve les arêtes.

On défini le plongement $V \rightarrow V'$

$f : V = (v_1, ..., v_k) \rightarrow (f_1(v_1), ..., f_k(v_k))$

On a juste à montrer que f préserve les arcs

$(U,V) \in E$ ssi $\exists j$ t.q $(u_j, v_j) \in E_j$ et $\forall i \neq j : u_i = v_i$

$\Rightarrow (f_j(u_j), f_j(v_j)) \in E'_j$ par définition

et $f_i(u_i) = f_i(v_i)\ \forall i \neq j$

Donc $(f(u), f(v)) \in E'$

Conclusion (1)

On a donc trois lemmes qui nous permettent de conclure pour le plongement d'une grille de dimension quelconque:

- une grille est un produit cartésien de réseaux linéaires,
- un hypercube est un produit cartésien d'hypercubes,
- un réseau linéaire est un sous graphe d'un hypercube,

$\Rightarrow$ toute grille $2^{r1} \times 2^{r2} \times ... \times 2^{rk}$ est un sous graphe de H_r avec $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$

$\Rightarrow$ toute grille de 2^r nœuds (de dimension quelconque) est un sous-graphe de H_r car 2^r ne se factorise qu'en puissance de 2

Conclusion (2)

Si les tailles ne sont pas des puissances de 2, on arrondi Grille $M_1 \times ... \times M_k \rightarrow 2^{\lceil \log M_1 \rceil + ... + \lceil \log M_k \rceil}$

On peut montrer que la grille $M_1 \times ... \times M_k$ est un sous graphe de l'hypercube à N nœuds ssi $N \geq 2^{\lceil \log M_1 \rceil + ... + \lceil \log M_k \rceil}$

On peut aussi montrer que l'on peut toujours plonger une grille 2D à N nœuds dans un hypercube à N nœuds si l'on autorise une dilatation de 2