

Filtrage non linéaire pour l'hybridation GPS-INS

Audrey Girémus et Jean-Yves Tourneret

Plan

- **Systemes de navigation couplés**
 - GPS
 - Systemes de navigation inertiels
- **Modèle d'hybridation**
 - Modèle d'état
 - Modèle d'observation
- **Méthodes de filtrage**
 - Principes du filtrage particulaire
 - Algorithmes appliqués
- **Résultats de simulation**

Les systèmes de navigation

La navigation est la science qui consiste à déterminer la position d'un véhicule à partir des mesures d'un système de capteurs.

Les différents types de systèmes :

- **La navigation céleste** : basée sur des mesures angulaires par rapport à des objets célestes.
- **Les systèmes de navigation à l'estime** : la position est obtenue par intégrations successives à partir d'informations d'accélération et vitesse (INS).
- **Les systèmes de radio navigation** : basés sur des émetteurs radio-fréquence de position connue (GPS, GLONASS, GALILEO).

Les systèmes de navigation inertiels

Intégrations + changements de repère \Rightarrow position, vitesse

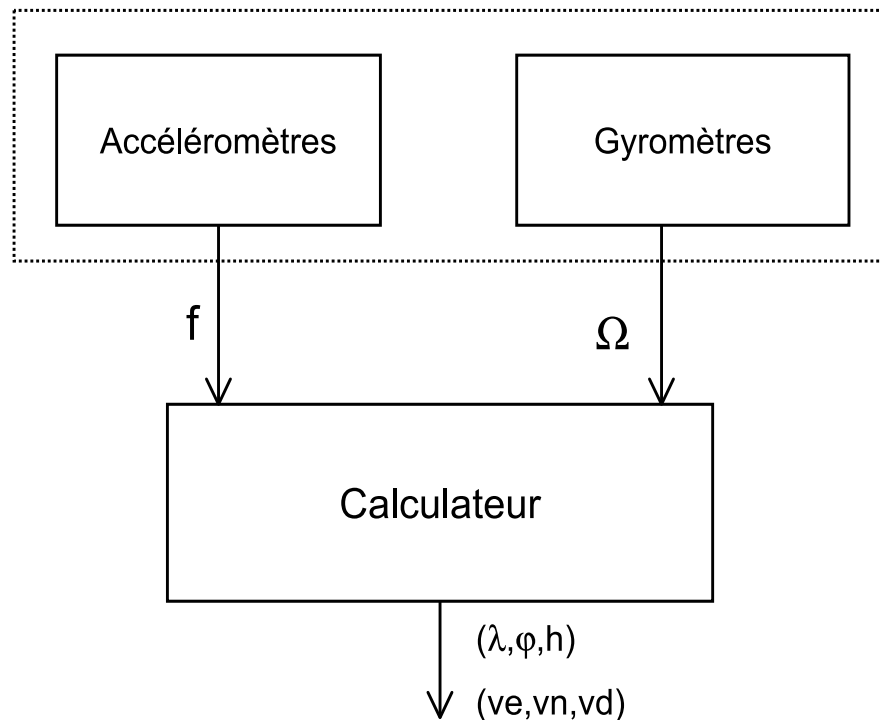
Les sorties capteurs

- f : accélération inertielle dans le repère capteur
- Ω : vecteur rotation instantané du repère capteur/repère inertielle



Les sorties du calculateur

- (v_n, v_e, v_d) : vitesse dans un repère local
- (λ, ϕ, h) : latitude, longitude, altitude



Les systèmes de navigation inertiels

- Erreurs capteurs

Biais et bruit additif

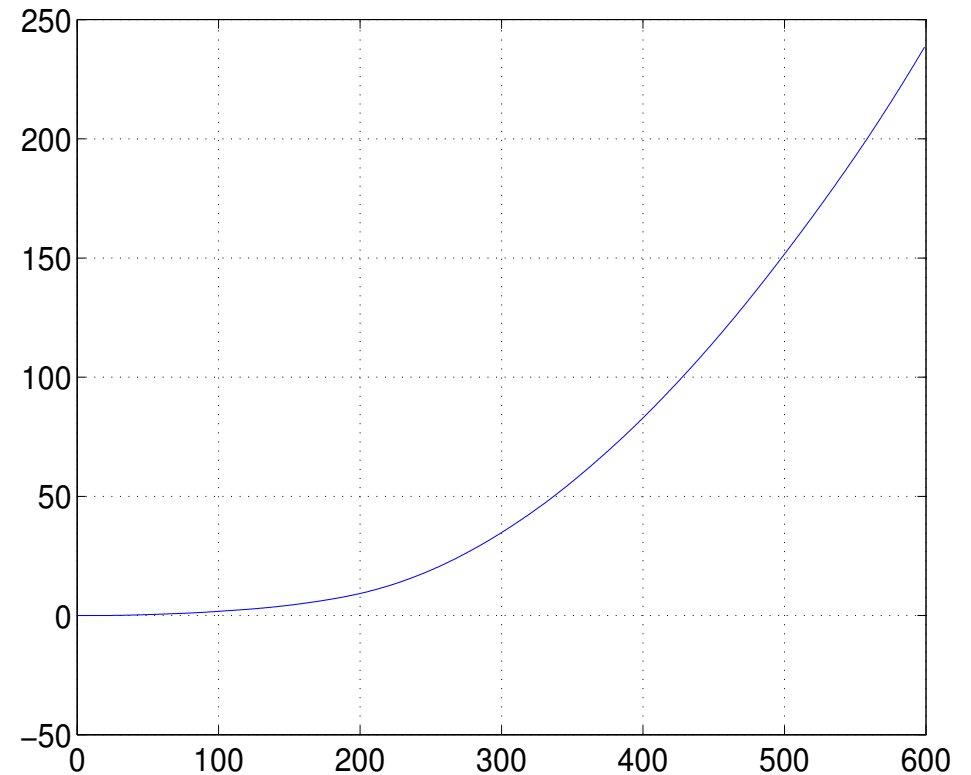


Dérive de l'erreur d'estimation

- Modèle capteurs

$$f_m = f + b_a + w_a$$

$$\Omega_m = \Omega + b_g + w_g$$



Dérive en latitude (m) au cours du temps

⇒ Nécessité de recalibrer les sorties inertielles

Le système GPS

Système de radio-navigation par satellites

Principe

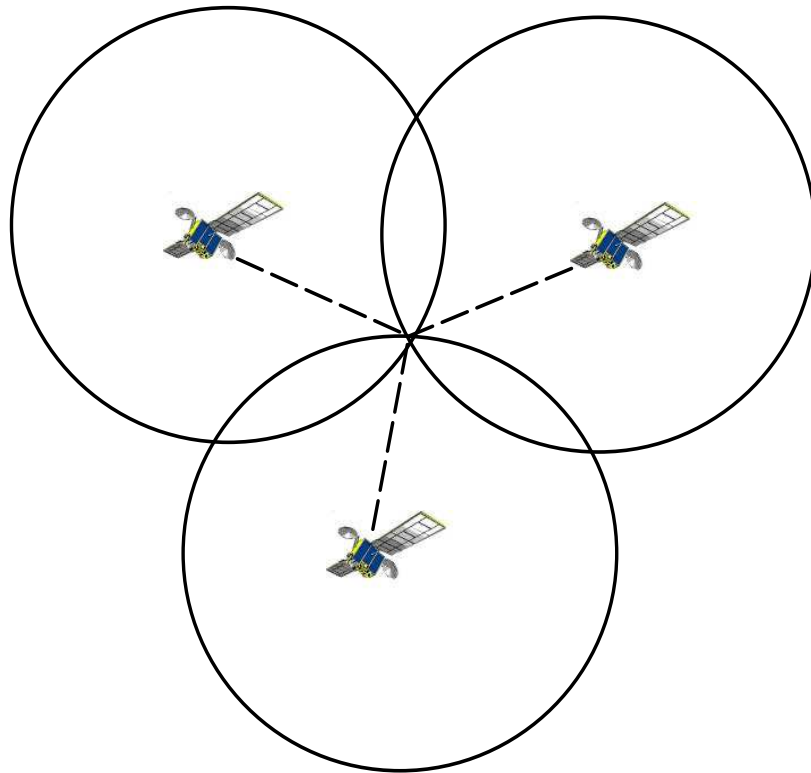
Calcul de la position et de la vitesse d'un mobile à partir de mesures de distances et de vitesses radiales par rapport à des satellites de position connue

Mesures

- Distance aux satellites :
Produit du délai de propagation Δt d'une onde par la vitesse de propagation c
- Vitesse radiale : mesure du déphasage Doppler

Le système GPS

La position est obtenue par triangulation



Equation de mesure

$$\rho = c\Delta t + b + w$$

- b : biais de l'horloge récepteur
- w : retard de propagation non corrigé + bruits de réception

Biais de l'horloge récepteur \Rightarrow 4 satellites au moins nécessaires

Pourquoi coupler l'inertie et le GPS ?

GPS

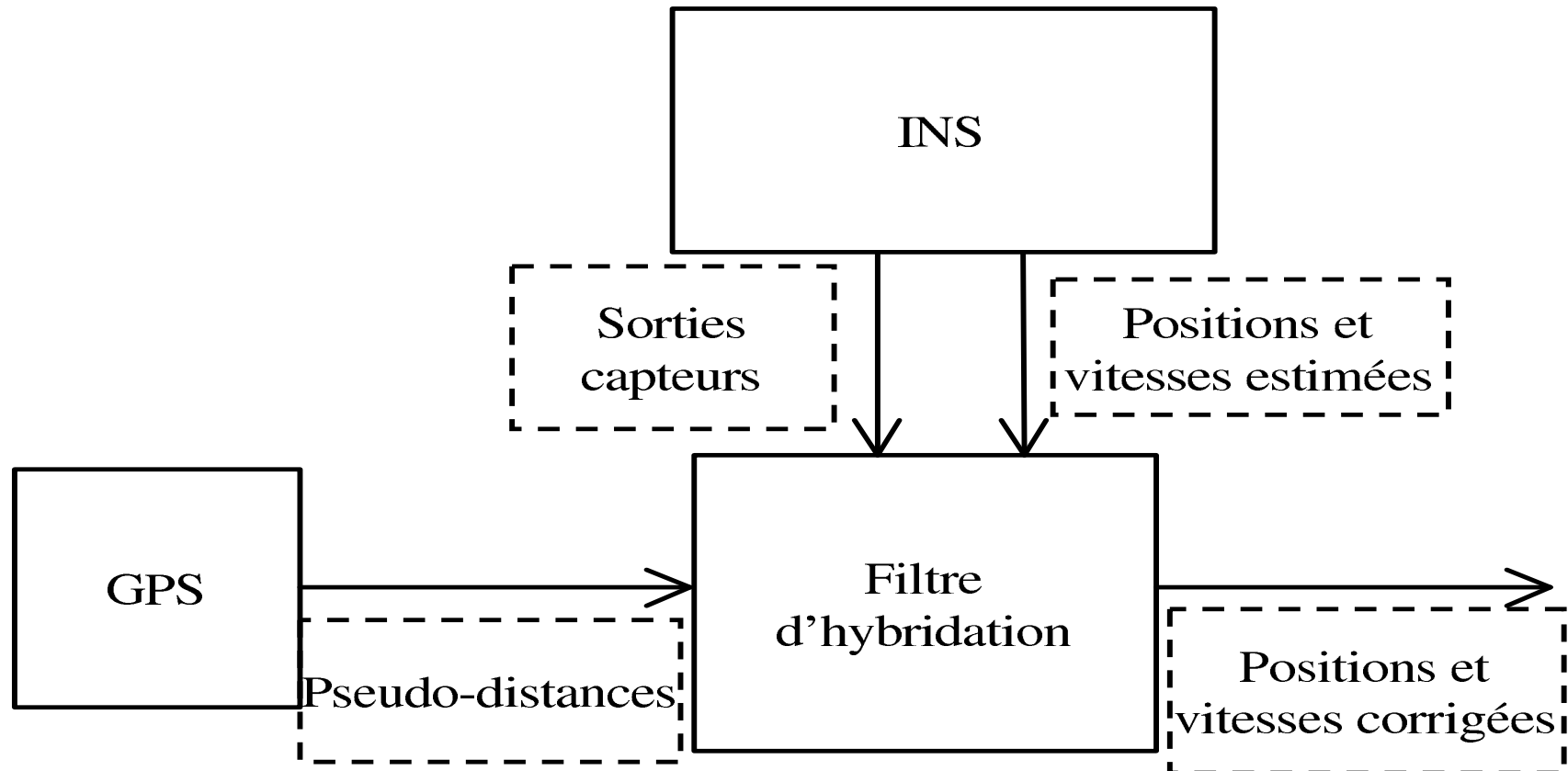
- Sensibilité aux interférences
- Erreur bornée dans le temps
- Sorties : Position, vitesse, temps

Systemes de navigation inertiels

- Autonomie
- Bonne précision à court terme et dérive à long terme
- Sorties : Position, vitesse, attitude

⇒ Les deux systèmes sont complémentaires

Architecture de couplage



Modèle d'état

Choix du vecteur état

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{V}$$

- **Choix classique en navigation :**

les grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération)

⇒ Grande dynamique

⇒ Grande bande passante

⇒ Erreurs GPS mal lissées

- **Choix adopté :**

les erreurs inertielles, les biais de mesure GPS et INS

$$\mathbf{X} = (\delta\mathbf{v}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g, \delta\mathbf{p}, b, f)^t$$

Modèle d'état

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \Rightarrow \delta \dot{\mathbf{X}} = \frac{\delta f(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\delta \mathbf{X}} \delta \mathbf{X} + \frac{\delta f(\mathbf{X}, \mathbf{U})}{\delta \mathbf{U}} \delta \mathbf{U}$$

.....

Equations de navigation

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_{ne}^n \wedge \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}^n + \mathbf{g}^n - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \wedge \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega}_{nm}^m &= \boldsymbol{\Omega} + R_{n2m} \boldsymbol{\omega}_{ni}^n \end{aligned}$$

.....

Equations d'erreur

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{p}} &= \delta \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_{ne}^n \wedge \delta \mathbf{p} + \delta \boldsymbol{\omega}_{ne}^n \wedge \mathbf{p} \\ \delta \dot{\mathbf{v}} &= -\mathbf{f}^m \wedge \boldsymbol{\rho} + R_{m2n} \mathbf{b}_a + \delta \mathbf{g}^n - (\delta \boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\delta \boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \wedge \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega}_{en}^n + 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n) \wedge \delta \mathbf{v} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} &= R_{m2n} \mathbf{b}_g - \delta \boldsymbol{\omega}_{in}^n - \boldsymbol{\omega}_{in}^n \wedge \boldsymbol{\rho} \end{aligned}$$

Modèle d'état

Modélisation des biais de mesure

Mouvements browniens

Biais d'horloge GPS

$$\begin{cases} \dot{b} = f + w_b \\ \dot{f} = w_f \end{cases}$$

Biais de mesure du système inertielle

$$\begin{cases} \dot{b}_a = w_{ba} \\ \dot{b}_g = w_{bg} \end{cases}$$

w_b, w_d, w_{ba}, w_{bg} bruits blancs gaussiens centrés

Modèle d'état

Découplage de la dynamique verticale

Equation de vitesse verticale

$$\delta \dot{v}_d \simeq \frac{2g}{R} \delta h$$

Equation d'altitude

$$\begin{aligned} \delta \dot{h} &= -\delta v_d \\ \delta \ddot{h} &\simeq -\frac{2g}{R} \delta h \end{aligned}$$

$\Rightarrow h$ et v_d instables

$\Rightarrow h$ et v_d estimées séparément

Modèle d'état

Matrice d'état à temps continu

- Construite par linéarisation autour des sorties inertielles

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C_2 & [0] \\ C_1 & A_2 & [0] \\ [0] & [0] & A_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = (\delta \mathbf{v}, \boldsymbol{\rho}, \mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g)$$

$$X_2 = (\delta \lambda, \delta \phi)$$

$$X_3 = (b, f)$$

- Structure par blocs, découplage de X_3

Modèle d'observation

Notations

- $(X_{\text{INS}}, Y_{\text{INS}}, Z_{\text{INS}})$: position estimée par l'INS
- (X_s, Y_s, Z_s) : position du satellite
- $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$: erreurs inertielles en coordonnées cartésiennes

Formulation pour n satellites en vue

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(X_{\text{INS}} + \delta X - X_{s_1})^2 + (Y_{\text{INS}} + \delta Y - Y_{s_1})^2 + (Z_{\text{INS}} + \delta Z - Z_{s_1})^2} + b + w_1 \\ \vdots \\ \sqrt{(X_{\text{INS}} + \delta X - X_{s_i})^2 + (Y_{\text{INS}} + \delta Y - Y_{s_i})^2 + (Z_{\text{INS}} + \delta Z - Z_{s_i})^2} + b + w_i \\ \vdots \\ \sqrt{(X_{\text{INS}} + \delta X - X_{s_n})^2 + (Y_{\text{INS}} + \delta Y - Y_{s_n})^2 + (Z_{\text{INS}} + \delta Z - Z_{s_n})^2} + b + w_n \end{pmatrix}$$

Principes du Filtrage Particulaire

Objectif : Estimer récursivement $p(x_{0:t}|y_{1:t})$ et par suite :

- les lois marginales $p(x_t|y_{1:t})$
- des moyennes (e. g. moyenne a Posteriori) $I(f_t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x_{0:t})p(x_{0:t}|y_{1:t})dx_{0:t}$

Hypothèses

- Loi de l'état initial $p(x_0)$ connue
- Equation d'état $p(x_t|x_{0:t-1})$ connue
- Equation d'observation $p(y_t|x_{0:t}, y_{1:t-1})$ connue

Notations

- Vecteurs d'état jusqu'à l'instant t : $x_{0:t} = \{x_0, \dots, x_t\}$
- Observations jusqu'à l'instant t : $y_{1:t} = \{y_1, \dots, y_t\}$

Perfect Monte-Carlo Sampling

Si $x_{0:t}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$ sont des particules distribuées suivant $p(x_{0:t}|y_{1:t})$, alors

Estimateur de $I(f_t)$

$$\hat{I}(f_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_t(x_{0:t}^{(i)})$$

Estimateur de $p(x_{0:t}|y_{1:t})$

$$\hat{p}(x_{0:t}|y_{1:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x_{0:t} - x_{0:t}^{(i)})$$

Problème : on ne sait pas échantillonner suivant $p(x_{0:t}|y_{1:t})$

Echantillonnage d'importance

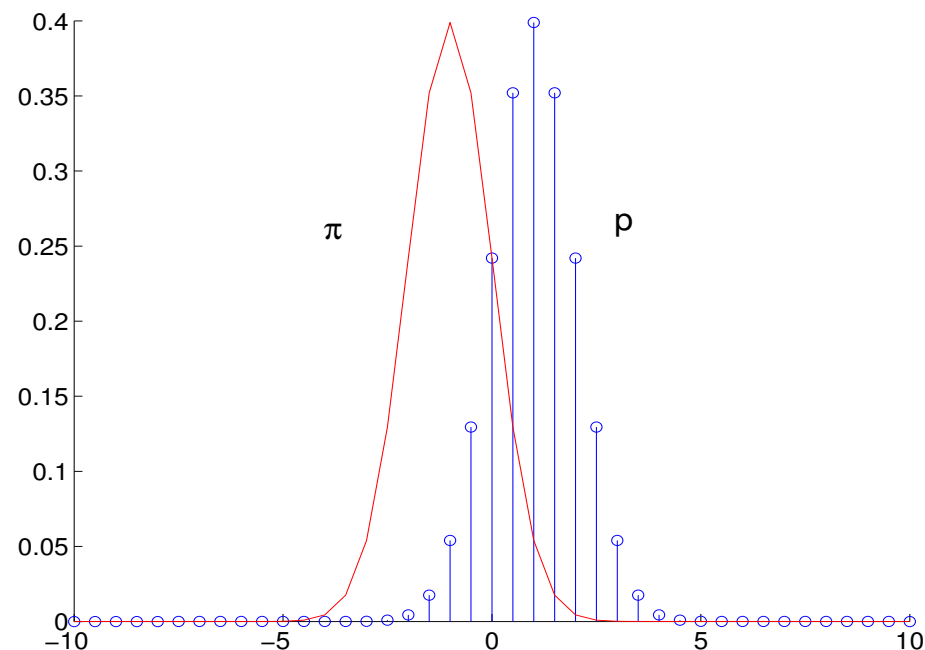
Les particules $x_{0:t}^{(i)}$ sont distribuées selon $\pi(x_{0:t}|y_{1:t})$, loi de proposition

Estimateur de $I(f_t)$

$$\hat{I}_N(f_t) = \sum_{i=1}^N f_t(x_{0:t}^{(i)}) \tilde{\omega}_t^{(i)}$$

Estimateur de $p(x_{0:t}|y_{1:t})$

$$\hat{p}_N(x_{0:t}|y_{1:t}) = \sum_{i=1}^N \tilde{\omega}(x_{0:t}^{(i)}) \delta(x_{0:t} - x_{0:t}^{(i)})$$



Poids d'importance

$$\omega(x_{0:t}^{(i)}) = \frac{p(x_{0:t}^{(i)}|y_{1:t})}{\pi(x_{0:t}^{(i)}|y_{1:t})} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}(x_{0:t}^{(i)}) = \frac{\omega(x_{0:t}^{(i)})}{\sum_{i=1}^N \omega(x_{0:t}^{(i)})}$$

Rééchantillonnage

Formulation récursive

- Π choisie pour que les trajectoires passées restent inchangées
- Expression récursive des poids :

$$\omega(x_{0:t}^{(i)}) \propto \omega(x_{0:t-1}^{(i)}) \frac{p(y_t | x_{0:t}^{(i)}) p(x_t^{(i)} | x_{0:t-1}^{(i)}, y_{1:t})}{\Pi(x_t^{(i)} | x_{0:t-1}^{(i)}, y_{1:t})}$$

Problème

- Dégénérescence : la variance des particules augmente au cours du temps.
- Solution : rééchantillonner les particules selon la loi estimée.

Application à l'hybridation INS-GPS

Caractéristiques du système :

- Instable
- Faible bruit d'état
Bootstrap filter : les particules se concentrent dans des zones de faible vraisemblance
- Modèle conditionnellement linéaire gaussien

Méthodes utilisées :

- Simuler selon la loi optimale : $\Pi(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t}) = p(x_t|x_{0:t-1}, y_{0:t})$
- Auxiliary Particle Filter
- Rao-Blackwellisation

Rao Blackwellisation

La loi cible est intégrée analytiquement par rapport à certains états pour diminuer la variance des estimées. Pour le système GPS/INS :

Équation d'état

$$X_{k,1} = A_1 X_{k-1,1} + B_1 V_{k,1}, \quad X_{0,1} \sim \mathcal{N}(m_{0,1}, P_{0,1})$$

$$X_{k,2} = A_2 X_{k-1,2} + C_1 X_{k,1} + D_1 V_{k,1}, \quad X_{0,2} \sim \mathcal{N}(m_{0,2}, P_{0,2})$$

$$X_{k,3} = A_3 X_{k-1,3} + B_3 V_{k,3}, \quad X_{0,3} \sim \mathcal{N}(m_{0,3}, P_{0,3})$$

Équation d'observation

$$Y_k = h(X_{k,2}) + C_3 X_{k,3} + D_3 W_k$$

Remarques :

- $X_{k,1}$ n'intervient pas dans l'équation d'observation
- $X_{k,2}$ intervient non-linéairement dans l'équation d'observation
- $X_{k,3}$ intervient linéairement dans l'équation d'observation

⇒ intégration possible par rapport à $X_{k,1}$ et $X_{k,3}$, i.e.

$$p(x_{0:n,1}, x_{0:n,2}, x_{0:n,3} | Y_{0:n}) = p(x_{0:n,1}, x_{0:n,3} | Y_{0:n}, x_{0:n,2}) p(x_{0:n,2} | Y_{0:n})$$

Estimation de $X_{k,2}$

Sampling step

- For $i = 1, \dots, N$, set $\tilde{X}_{0:n-1,2}^{(i)} = \hat{X}_{0:n-1,2}^{(i)}$ and sample $\tilde{X}_{n,2}^{(i)} \sim q(\cdot | Y_{0:n}, \tilde{X}_{0:n-1,2}^{(i)})$.
- For $i = 1, \dots, N$, evaluate the importance weights

$$w_n^{(i)} \propto \frac{p(Y_n | Y_{0:n-1}, \tilde{X}_{0:n,2}^{(i)}) p(\tilde{X}_{n,2}^{(i)} | \tilde{X}_{0:n-1,2}^{(i)})}{q(\tilde{X}_{n,2}^{(i)} | Y_{0:n}, \tilde{X}_{0:n-1,2}^{(i)})}, \quad \sum_{i=1}^N w_n^{(i)} = 1.$$

Resampling step

- Multiply/Discard particles $\{\tilde{X}_{0:n,2}^{(i)}\}$ wrt the high/low weights $\{w_n^{(i)}\}$ to obtain particles $\{\hat{X}_{0:n,2}^{(i)}\}$.

Estimateur MMSE de $X_{n,2}$:

$$\hat{X}_{n,2} = \sum_{i=1}^N w_n^{(i)} \tilde{X}_{n,2}^{(i)}.$$

Estimation de $X_{k,1}$

Densité marginale de $X_{k,1}$

$$\begin{aligned} p(x_{n,1}|Y_{0:n}) &= \int p(x_{n,1}, x_{n,2}|Y_{0:n}) dx_{n,2} \\ &= \int p(x_{n,1}|x_{n,2}, Y_{0:n}) p(x_{n,2}|Y_{0:n}) dx_{n,2} \end{aligned}$$

Estimation de $p(x_{n,1}|Y_{0:n})$

$$\begin{aligned} \hat{p}(x_{n,1}|Y_{0:n}) &= \sum_{i=1}^N w_n^{(i)} p(x_{n,1}|\tilde{X}_{n,2}^{(i)}, Y_{0:n}) \\ &= \sum_{i=1}^N w_n^{(i)} \mathcal{N}(x_{n,1}; \tilde{m}_{k|k,1}^{(i)}, P_{k|k,1}) \end{aligned}$$

C'est un mélange de lois normales dont les moyennes et variances sont issues de filtres de Kalman.

Estimation MMSE de l'état $X_{n,1}$

$$\hat{X}_{n,1} = \sum_{i=1}^N w_n^{(i)} \tilde{m}_{k|k,1}^{(i)}.$$

Approximations de la loi optimale

Approximations de Monte-Carlo de $\Pi(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t}) = p(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t})$

- méthode d'acceptation/rejet
- importance sampling

⇒ Solutions calculatoirement coûteuses

Linéarisation locale du modèle de filtrage

$$\begin{cases} x_t = A_t x_{t-1} + v_t \\ y_t = h(x_t) + w_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_t = A_t x_{t-1} + v_t \\ y_t = h(A_t x_{t-1}) + \nabla h|_{A_t x_{t-1}}(x_t - A_t x_{t-1}) + w_t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \pi(x_t|x_{0:t-1}, y_{1:t}) &\sim \mathcal{N}(m_t, \Sigma_t) \\ \Sigma_t^{-1} &= \Sigma_v^{-1} + \nabla h|_{A_t x_{t-1}}^t \Sigma_w^{-1} \nabla h|_{A_t x_{t-1}} \\ m_t &= \Sigma_t (\Sigma_v^{-1} A_t x_{t-1} + \nabla h|_{A_t x_{t-1}} \Sigma_w^{-1} (y_t - h(A_t x_{t-1}) + \nabla h|_{A_t x_{t-1}} A_t x_{t-1})) \end{aligned}$$

Auxiliary Particle Filter

Principe : les particules les plus vraisemblables du point de vue de la nouvelle observation sont propagées.

Algorithme : _____

Simulation des descendants des particules

$$\mu_t^i \sim \widehat{p}(x_t | x_{0:t-1}^i, y_{1:t-1})$$

Sélection des particules de descendant le plus vraisemblable

$$x_{t-1}^j \sim \widehat{p}(y_t | \mu_t^i)$$

Propagation des particules sélectionnées

$$x_t^j \sim \widehat{p}(x_t | x_{0:t-1}^j, y_{1:t-1})$$

Remarque : il suffit de savoir simuler la loi *a priori*

Conditions de simulation

- **GPS**

Ecart-type du bruit de mesure : $\sigma_b = 10$ m

Nombre de satellites vus par le récepteur : $N_s \geq 4$

- **INS**

Biais initial des accéléromètres : $b_{a_0} = 50 \mu g$

Biais initial des gyromètres : $b_{g_0} = 0.002$ deg/h

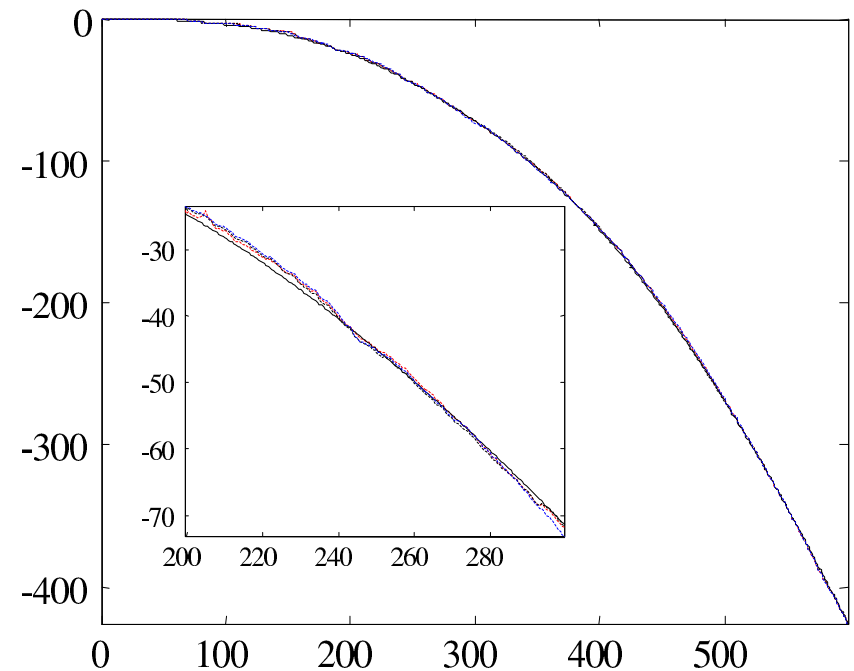
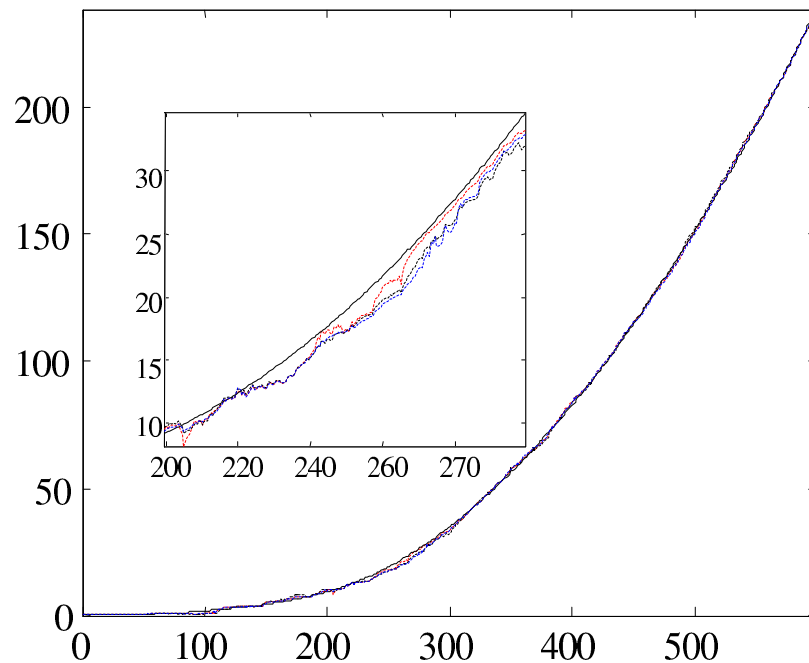
- **Filtre particulaire**

APF : 3000

Linéarisation locale : 1000

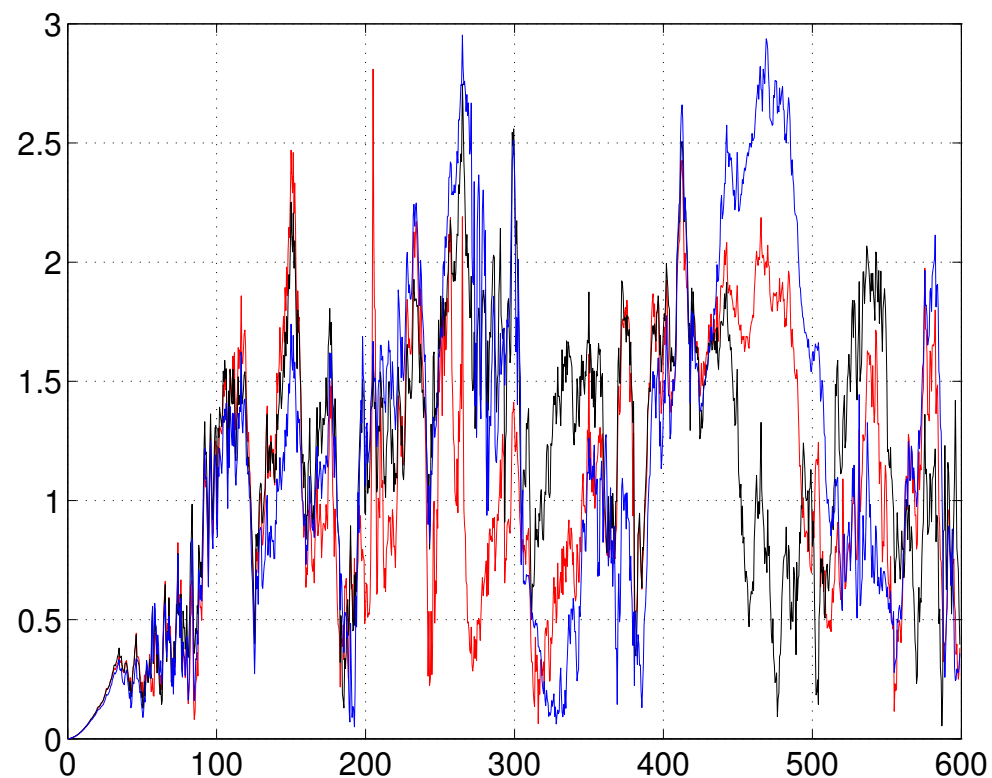
Approximation MC : 1000

Estimation des erreurs inertielles



Dérive en latitude (m) au cours du temps (s) Dérive en longitude (m) au cours du temps (s)
Rouge : MC, Bleu : linéarisation locale, Noir : APF

Erreurs d'estimation



Erreur horizontale d'estimation(m) au cours du temps (s)

Rouge : MC, Bleu : linéarisation locale, Noir : APF

Erreurs moyennes d'estimation en latitude et longitude

	$\delta\lambda(m)$	$\delta\phi(m)$
APF	0.6977	0.7355
MC	0.5411	0.7589
Linéarisation locale	0.6305	0.8343

Conclusion

Résultats

- Erreur d'estimation inférieure au mètre pour une bonne observabilité
- Choix de la loi de proposition déterminant

En cours d'étude

- Comparaison avec le filtre de Kalman étendu pour des situations critiques (perte d'observabilité ou perturbation des mesures : occultation et multi-trajets)
- Etude de l'hybridation très serrée